

Продуктивность горизонтальных скважин с многозонным гидроразрывом пласта и способы ее расчета

М.Р. Хамидуллин^{1,2*}, К.А. Поташев^{2,3}, А.Б. Мазо²

¹Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Россия

²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

³Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия

Выполнен многопараметрический количественный анализ продуктивности горизонтальных скважин с многозонным гидравлическим разрывом пласта в режиме установившегося притока на основе высокоточного численного решения трехмерной задачи на подробной конечно-объемной сетке. Выявлены условия целесообразности выполнения многозонного гидроразрыва пласта и взаимосвязь основных параметров системы для достижения заданного уровня продуктивности скважины. Установлены условия и предложена аналитическая запись приближенного критерия, когда приток к стволу скважины пренебрежимо мал по сравнению с притоком к трещинам гидроразрыва. Оценена точность и установлены условия применимости наиболее обоснованных упрощенных аналитических моделей расчета продуктивности.

Ключевые слова: горизонтальные скважины, многозонный гидроразрыв пласта, установившаяся фильтрация, продуктивность скважин, аналитические модели, численное моделирование, эмпирические формулы

Для цитирования: Хамидуллин М.Р., Поташев К.А., Мазо А.Б. (2025). Продуктивность горизонтальных скважин с многозонным гидроразрывом пласта и способы ее расчета. *Георесурсы*, 27(4). <https://doi.org/10.18599/grs.2025.4.6>

Введение

Многозонный гидроразрыв пласта (МГРП) на горизонтальных скважинах (ГС) – один из распространенных методов интенсификации добычи нефти, в том числе в низкопроницаемых коллекторах (Gidley et al., 1989; Butler 1996; Каневская, 1999; Economides, Valko 2001; Wei, Economides, 2005; Ozkan et al., 2009). Для создания трещин гидроразрыва в скважину под высоким давлением закачивается жидкость вместе с проппантом – расклинивающим агентом, препятствующим смыканию трещин после снятия высокого давления.

Моделирование и оценка эффективности МГРП широко изучаются, однако, важной задачей остается надежная оценка прироста дебита скважины после применения данной технологии. Представленные в литературе модели можно разделить на аналитические, полуаналитические и полностью численные. Численное моделирование является одновременно наиболее приспособленным к учету таких факторов, как форма области дренирования, геометрия и проницаемость трещин, геологическое строение пласта, но и наиболее ресурсоемким при своей

программной реализации, подготовке модели и построении решения. Аналитические и полуаналитические модели более просты в использовании, но заложенные в их основу гипотезы могут оказаться недопустимыми. Поэтому наряду с разработкой специализированных эффективных численных моделей продуктивности скважин с МГРП актуален вопрос определения условий применимости упрощенных моделей.

В данной работе рассмотрение ограничивается случаем установившегося притока пластового флюида к скважине и трещинам гидроразрыва.

Аналитические модели. (Giger, 1984) предложил первую модель для анализа продуктивности ГС, пересеченной естественными трещинами. Данная модель учитывает течения в пласте и в трещинах и позволяет оценить продуктивность ГС в несжимаемом пласте с учетом анизотропии. (Mukherjee, Economides, 1991) разработали упрощенную модель, основанную на модели (Joshi, 1988) и корреляции безразмерного радиуса скважины (Prats, 1961). В работе (Raghavan, Joshi, 1993) рассматривается круговой участок пласта, содержащий горизонтальную скважину с трансверсальными трещинами МГРП. Расстояние между трещинами считается одинаковым и превосходящим максимальную длину трещин. Течение внутри трещин не учитывается. В работе (Li et al., 1996) рассматриваются упрощенная модель притока жидкости к ГС с МГРП с учетом перфорации на скважине. Расстояние между трещинами произвольное.

* Ответственный автор: Марсель Рашитович Хамидуллин
e-mail: marseille.ksu@gmail.com

© 2025 Коллектив авторов

Статья находится в открытом доступе и распространяется в соответствии с лицензией Creative Commons Attribution (CC BY) License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

(Guo, Schechter, 1997) представили математическую модель, учитывающую стационарное линейное течение в пласте и в трещинах. Радиальное течение в трещинах вблизи скважины не учитывается. В исследовании (Guo, 2009) рассматривается ГС с МГРП с заданным забойным давлением. При решении задачи отыскивается давление на границе призабойной зоны скважины, отделяющей ее от некоторой произвольной области пласта, в которой задано среднее давление. Для определения продуктивности скважины определяется приток из этой области дренирования в скважину и в трещины МГРП. Авторы (Yuan, 2010) представили метод оценки дебита ГС с МГРП, в котором учитывается поток из пласта в скважину и из трещин в скважину. Модель применяется к скважинам с МГРП и без него. Рассматривается область пласта в виде окружности, внутри которой выделена призабойная область в виде эллипса, содержащего ГС с трещинами МГРП. Позднее модификация данной модели была представлена в работе (Zhang et al., 2012), однако в обеих моделях делается довольно грубое предположение о пропорциональности дебита трещин их проницаемости и независимости от проницаемости пласта.

В качестве примера численно-аналитической модели можно привести представленную в работах (Мазо, 2015; Mazo, 2019) модель, учитывающую приток из пласта в трещины и в скважину, а также из трещины в скважину. Трещины имеют конечную проницаемость. В предположении о близких значениях длины и высоты трещин модель имеет хорошее согласование с численным решением.

Численные модели продуктивности скважин с МГРП можно разделить по вариантам их реализации – в закрытых коммерческих симуляторах или в виде программного обеспечения с открытым исходным кодом. Последнее является наиболее перспективным и надежным для решения научно-исследовательских задач. Одной из таких программ является пакет MRST (MATLAB Reservoir Simulation Toolbox) (Lie, 2019), которая дает хорошо согласующееся решение с зарекомендовавшими себя коммерческими пакетами Eclipse 300, AD-GRPS.

Одним из наиболее общих подходов к решению задач в области нефтяного пласта, содержащего множество трещин, является метод сети дискретных трещин (discrete fracture network, DFN) (Long et al., 1982; Robinson, 1984). Реализация такого подхода сопряжена с известными трудностями. Во-первых, DFN требует значительных вычислительных ресурсов, так как рассматриваются задачи в трехмерной постановке (Human et al., 2015; Xing et al., 2017). Во-вторых, возникает необходимость решения дополнительной задачи о сопряжении решений на расчетных сетках в пласте и в трещинах (Frih et al., 2012; Tan et al., 2018).

В работе (Симонов, Рошкетев, 2017) рассматривается модель ГС с МГРП с учетом естественной трещиноватости пласта. Трещины имеют одинаковую длину и проницаемость, проницаемость пласта много меньше проницаемости трещин. Модель не учитывает гравитационные силы, течение считается изотермическим. Задача решается численно с помощью метода конечных разностей, расчетная сетка строится с измельчением к скважине и к трещинам ГРП.

Методика численного моделирования притока жидкости к горизонтальной скважине с многостадийным гидроразрывом пласта в гидродинамических симуляторах газоконденсатных низкопроницаемых коллекторов рассмотрена в работе (Присмотров, 2023). Выделяются несколько способов: корректировка соединений скважина-пласт, применение виртуальной перфорации, локальное измельчение сетки и использование неструктурированных сеток. Авторы делают заключение, что наиболее точная оценка может быть получена только при численном моделировании на детальной сетке.

В представленной работе для получения эталонного численного решения о продуктивности скважины с МГРП использована собственная трехмерная конечно-объемная модель (Мазо, 2015; Хамидуллин 2016; Mazo, 2017; Мазо, Хамидуллин, 2017; Mazo, 2024), достоверность которой оценена сравнением со специализированным модулем пакета MRST. С ее помощью выполнен многопараметрический анализ продуктивности ГС с МГРП на подробной расчетной сетке. Исследованы условия, когда приток к стволу скважины пренебрежимо мал по сравнению с притоком к трещинам гидроразрыва. Определены условия применимости наиболее обоснованных аналитических моделей расчета продуктивности скважин с МГРП.

1. Постановка и метод решения задачи

1.1 Математическая постановка

Рассматривается задача однофазной фильтрации в области дренирования Ω горизонтальной скважины с МГРП (рис. 1) в виде прямоугольного параллелепипеда с закругленными краями Γ равноудаленными от скважины на расстояние r_c , ограниченного сверху и снизу соответственно кровлей T и подошвой B . Горизонтальная скважина γ является вырезом цилиндрической формы радиуса r_w и длины L вдоль оси Oy . Каждая трещина МГРП под номером $i = 1..N$ ограничена двумя параллельными вертикальными плоскостями F_i^-, F_i^+ с внешней нормалью в направлениях $\pm y$, расположенными на расстоянии $\pm \delta_i$ от плоскости $y = y_i$.

Нормированные уравнения задачи для несжимаемых флюида и пласта при выполнении закона фильтрации Дарси имеют вид (Баренблатт, 1984)

$$-\nabla \cdot (k \nabla p) = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = -k \nabla p, \quad (2)$$

где p – давление насыщающего поры флюида; $\mathbf{u}$ – скорость фильтрации; $k(\mathbf{x})$ – абсолютная проницаемость пористой среды; $\mathbf{x}$ – вектор пространственных координат.

Уравнения (1), (2) эквивалентны случаю установившейся фильтрации сжимаемой жидкости в упругом пласте при замене в них давления p на функцию Лейбензона (Христианович, 1938):

$$P = \int \rho(p) \frac{\alpha(p)}{\mu(p)} dp,$$

а скорость объемного потока $\mathbf{u}$ – на скорость массового потока $\rho \mathbf{u}$. Здесь $\rho(p)$, $\mu(p)$ – функции относительного изменения плотности и вязкости флюида; $\alpha(p)$ – функция относительного изменения проницаемости пористой среды. Поэтому все приведенные ниже рассуждения

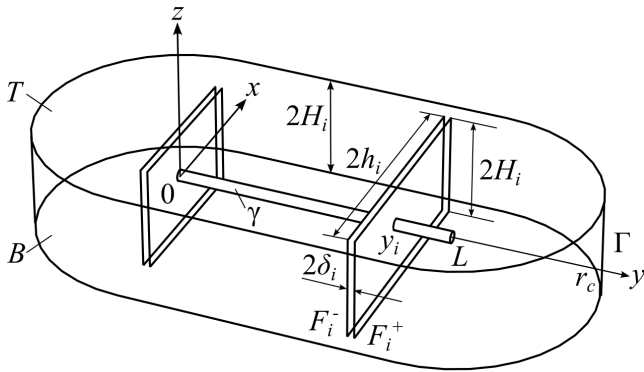


Рис. 1. Схема расположения трещин многозонного гидроразрыва вдоль горизонтальной скважины

о течении несжимаемой жидкости в несжимаемой среде переносятся на случай стационарного потока при наличии сжимаемости с соблюдением указанных аналогий.

В уравнениях (1), (2) линейные величины нормированы на параметр r_c эквивалентный половине расстояния до ближайших скважин, где устанавливается некоторое среднее пластовое давление p_c . Давление, в свою очередь, отсчитывается от давления p_w на скважине и нормируется на перепад давления $\Delta p = p_c - p_w$. Скорость фильтрации нормируется на характерную величину скорости фильтрации $u^0 = (k^0/\mu^0)(\Delta p/r_c)$ рассматриваемого флюида с вязкостью μ^0 в данном пласте с проницаемостью k^0 при перепаде давления Δp на расстоянии r_c .

Уравнения (1), (2) действуют как в пласте, так и в каждой трещине ГРП, различаясь лишь величинами нормированной проницаемости – $k = 1$ и k_i соответственно, которые в пределах каждой подобласти будем полагать постоянными.

Уравнение для осредненного по раскрытию трещины i давления p_i получается интегрированием (1) (Мазо, 2015):

$$-\Delta_{xz}p_i + \frac{1}{2M_i}u_y \Big|_{F_i^-}^{F_i^+} = 0, \quad M_i = \frac{C_{fd}^i \cdot I_x^i}{2}, \quad (3)$$

Величина u_y в уравнении вычисляется по формуле в пласте и обеспечивает непрерывность массового потока флюида между пластом и трещинами гидроразрыва, $C_{fd}^i = 2k_i \delta_i / k h_i$ – безразмерная проводимость трещины, $I_x^i = h_i / r_c$ – коэффициент вскрытия (Economides, Valko 2001).

Обратимся к граничным условиям. Кровля и подошва пласта непроницаемы

$$\mathbf{x} \in T, B: \frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (4)$$

На внешней границе Γ поддерживается постоянное давление

$$\mathbf{x} \in \Gamma: p \equiv p_c = 1. \quad (5)$$

Падение давления вдоль ствола скважины γ не учитывается

$$\mathbf{x} \in \gamma: p \equiv p_w = 0. \quad (6)$$

В силу малой изменчивости давления по толщине трещин и его непрерывности на границе раздела трещина – пласт предполагается, что на берегах $F_i^\pm$ давление в пласте совпадает со средним давлением в трещине

$$\mathbf{x} \in F_i^\pm: p = p_i, \quad i = 1..N. \quad (7)$$

Торцы трещины непроницаемы

$$x = \pm h_i, z = \pm H_i: \frac{\partial p_i}{\partial n} = 0, \quad i = 1..N. \quad (8)$$

Система – определяет поле давления в области дренирования скважины с МГРП и в самих трещинах гидроразрыва, а также притоки пластового флюида q_i , q_γ – к отдельным трещинам и к стволу скважины соответственно, сумма которых составляет общий дебит q скважины:

$$q_\gamma = \int_{\gamma \cup \gamma_i} u_n d\Sigma, \quad q_i = \int_{F_i^- \cup F_i^+} u_n d\Sigma, \quad q_f = \sum_{i=1}^N q_i, \quad q = q_\gamma + q_f. \quad (9)$$

Здесь γ_i – участки ствола скважины, расположенные внутри трещины i при $y_i - \delta_i < y < y_i + \delta_i$.

В условиях нормировки уравнений задачи, введенные дебиты выполняют роль продуктивности – отношения расхода отбираемой жидкости к приложенному перепаду давления. Требуется исследовать поведение общей продуктивности скважины и отдельных ее элементов в различных условиях выполнения МГРП.

1.2 Метод численного решения и его апробация

Задача (1) – (9) решается численно методом конечных объемов с помощью собственного симулятора на конечно-объемной сетке со сгущением вблизи скважины (Хамидуллин, 2016). Трещины размыкают трехмерную сетку в пласте инцидентной к ней двумерной конечно-объемной сеткой.

В качестве верификации численного решения выполнено сравнение с численным решением в пакете MRST для одной и трех трещин (рис. 2). Отметим, что в отличие от ПО MRST используемый симулятор дает детализацию и полный доступ к анализу всех гидродинамических параметров течения, в частности, с возможностью построения профилей притока к каждому из берегов трещин.

2. Результаты

2.1 Доля притока к стволу в общем дебите скважины

Проведение многостадийного гидроразрыва пласта с образованием длинных трансверсальных трещин способствует увеличению зоны дренирования и притока к трещинам МГРП. При этом вблизи ствола скважины увеличивается область пониженного давления, и приток q_γ к стволу скважины снижается по сравнению с ее общим дебитом q . Особого внимания заслуживает оценка величин соответствующей доли $\eta = q_\gamma / q$. Условия, при которых наблюдаются малые значения η , означают возможность пренебрежения дебитом ствола скважины и применения более простых моделей притока только к трещинам МГРП.

Для получения более наглядных качественных оценок продуктивности число независимых параметров задачи можно сократить за счет следующих допущений: 1) скважина проходит посередине пласта, 2) все трещины имеют одинаковые значения ширины раскрытия $\delta_i = \delta$ и полудлины $h_i = h$, 3) их высота совпадает с высотой пласта $2H_i = 2H$, 4) проницаемость трещин одинакова $k_i = k_p$, 5) трещины равно удалены друг от друга, начиная с торцов скважины при $N > 1$, а в случае одной трещины ($N = 1$)

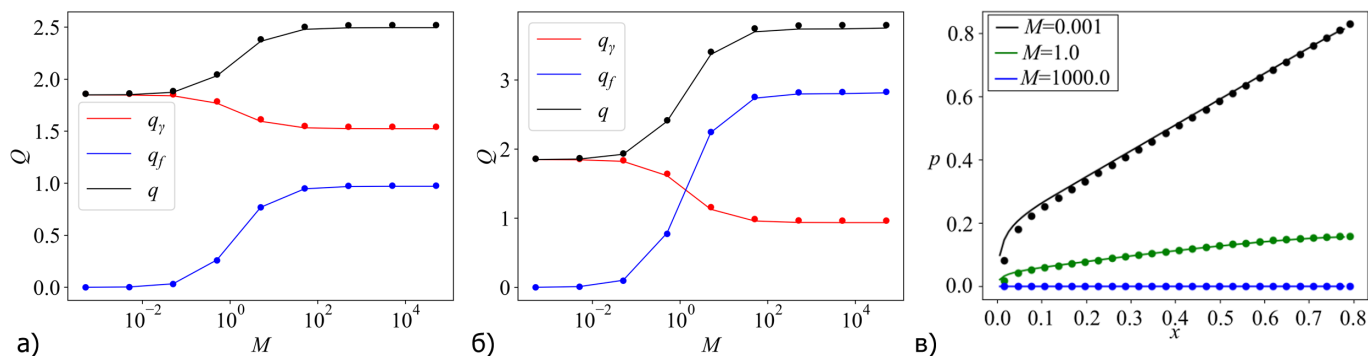


Рис. 2. Дебит горизонтальной скважины с разделением на приток к стволу и к трещинам ГРП для одной (а) и трех (б) трещин и распределение давления (в) вдоль трещины ГРП: линия – собственное решение, маркеры – решение MRST

она расположена в центре ствола скважины, 6) пласт однородный и изотропный по проницаемости.

В качестве варьируемых выбраны те параметры, которыми проще руководствоваться при проектировании скважины и МГРП – это полувысота пласта H , длина скважины L , а также полудлина h , проводимость M и количество N трещин. Все расчеты выполняются при фиксированной нормировке линейных параметров на расстояние r_c от горизонтальной скважины до контура с заданным пластовым давлением. Это расстояние можно интерпретировать, например, как половину среднего шага сетки скважин. Так, при типичном значении r_c : 10^2 м характерные значения нормированных величин высоты пласта, длины скважины, полудлин трещин лежат в следующих интервалах

$$2H = 0.1..1, L = 1..10, h = 0.1..1.$$

В свою очередь проницаемость трещин ГРП $10^{-10}..10^{-8}$ м², проницаемость пласта $10^{-15}..10^{-12}$ м² и раскрытие трещин порядка 0.01 м определяют интервал значений проводимости трещин $M = 10^{-2}..10^3$.

Критерий учета притока к стволу скважины

В работе (Yuan, 2010) приведен критерий, при котором, как утверждают авторы, можно пренебречь притоком к стволу скважины:

$$\sum_{i=1}^{N_f} \frac{k_f^i}{k} \cdot \frac{2\delta^i}{L} \cdot \frac{h^i}{r_c} \geq 1. \quad (10)$$

Данная оценка получена на основе упрощенной схемы вычисления эффективной проницаемости области дренирования скважины с МГРП, предложенной авторами указанной работы, когда скорректированная проницаемость пласта вокруг скважины с учетом наличия трещин становится отрицательной. Такой критерий формально можно считать полученным аналитически, однако заложенные в рассуждения предпосылки являются весьма приближенными.

В настоящей работе реализован эмпирический подход для вывода условия, при выполнении которого можно пренебречь притоком к стволу скважины. На основании проведенной серии расчетов приближенно установлено, что при одновременном выполнении условий

$$h \geq 0.8(2d - H), N \geq 5, M \geq 10, d \leq 0.7 \quad (11)$$

доля притока к стволу скважины принимает значения $\eta \leq 0.1$. Здесь d – половина расстояния между трещинами:

$$d = L/2(N - 1). \quad (12)$$

На приведенных ниже полях параметра η (рис. 4, 6, 7, 8) для сравнения указаны границы, разделяющие области значимого и пренебрежимо малого притока к стволу скважины, полученные по предложенному критерию (11) (синяя штриховая линия) и по критерию (10) (зеленая штриховая линия). Видно, что критерий из работы (Yuan, 2010) в большинстве случаев выполняется на интервале довольно значительных величин $0.1 < \eta < 0.4$, иногда достигая и уровня 0.8. В то же время предложенный эмпирический критерий (11) с довольно высокой точностью попадает в интервал значений $0.05 < \eta < 0.1$ (рис. 3).

Характерное влияние параметра M на приток к скважине можно оценить на примере рис. 4. При величинах $M = 0.01$ и менее, что эквивалентно случаям, когда проницаемость трещин превосходит проницаемость пласта не более чем на 2 порядка, практически весь дебит скважины обеспечивается притоком к ее стволу. Очевидно, рост проводимости трещин приводит к снижению доли η .

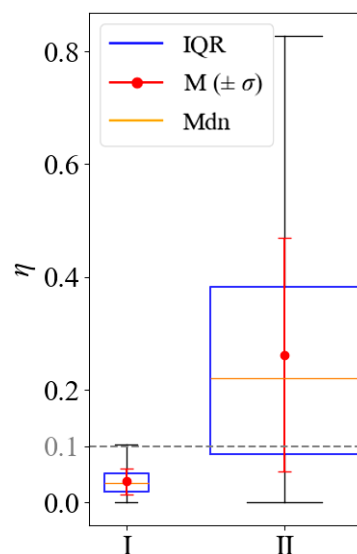


Рис. 3. Распределение расчетной доли притока к стволу скважины с МГРП при выполнении критериев пренебрежения данным притоком (I – из данной работе, II – из работы (Yuan, 2010)): M – среднее значение, σ – среднеквадратическое отклонение, Mdn – медиана; IQR – диапазон значений между Q1 и Q2 (первым и третьим квартилями); черные отсечки – границы минимального и максимального значений в диапазоне $[Q1 - 1.5 \cdot IQR, Q3 + 1.5 \cdot IQR]$

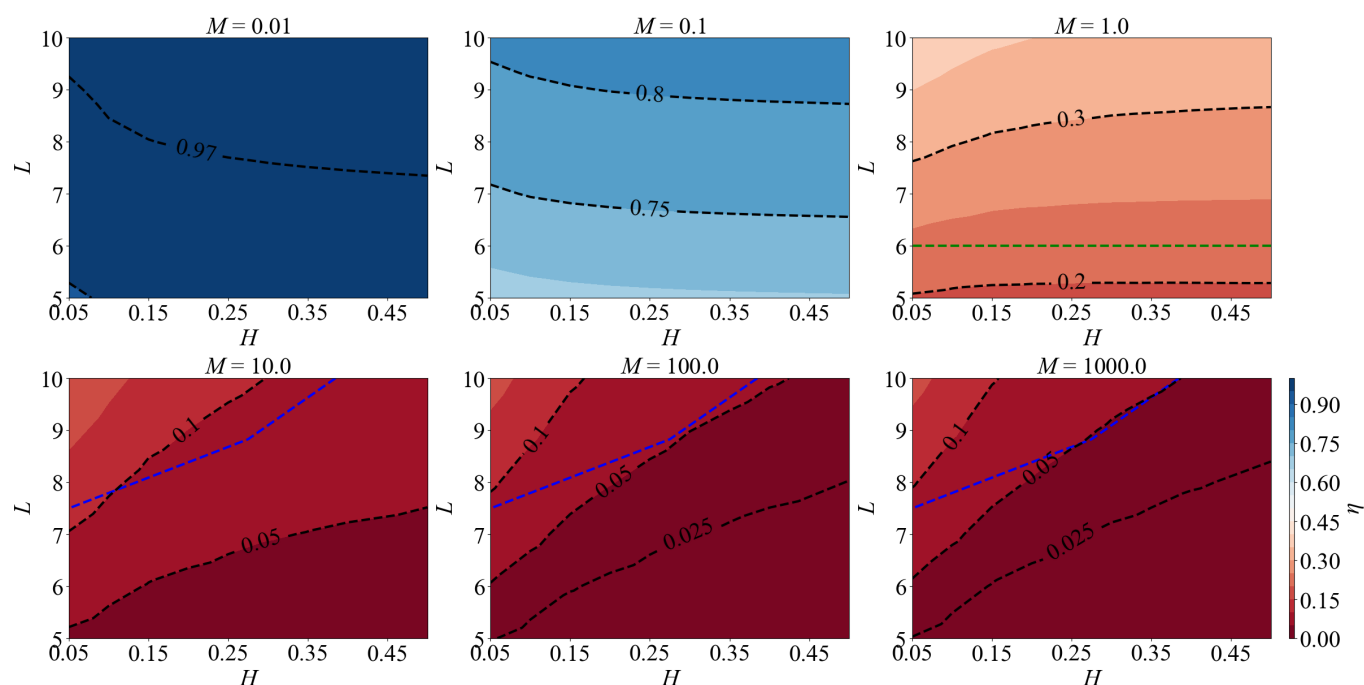


Рис. 4. Зависимость доли притока к стволу скважины от высоты пласта и длины скважины для разных проводимостей трещин при $N = 10$, $h = 0.6$; цветной пунктир – критерии пренебрежения притоком к стволу скважины – из работы (Yuan, 2010) (зеленый) и из настоящей работы (синий)

При этом случаи $M = 100$ и $M = 1000$ практически неотличимы, то есть при $M \geq 100$ можно утверждать, что система ведет себя аналогично случаю трещин бесконечной проводимости. Для оценочных расчетов, допускающих незначительную погрешность, приближением трещин бесконечной проницаемости можно считать значения $M \geq 10$. При характерных линейных параметрах системы это соответствует превосходству проницаемости трещин над проницаемостью пласта в 10^5 и более раз. По достижении таких условий потери давления в трещинах

сокращаются до 10 % от общего перепада давления (рис. 5), в связи с чем наблюдается снижение доли притока к стволу скважины с увеличением высоты пласта.

В то же время увеличение расстояния между трещинами с ростом длины скважины L приводит к увеличению относительного притока к стволу скважины при любой проводимости M , что обусловлено сокращением области малых скоростей фильтрации вблизи ствола скважины, вызванной интерференцией трещин.

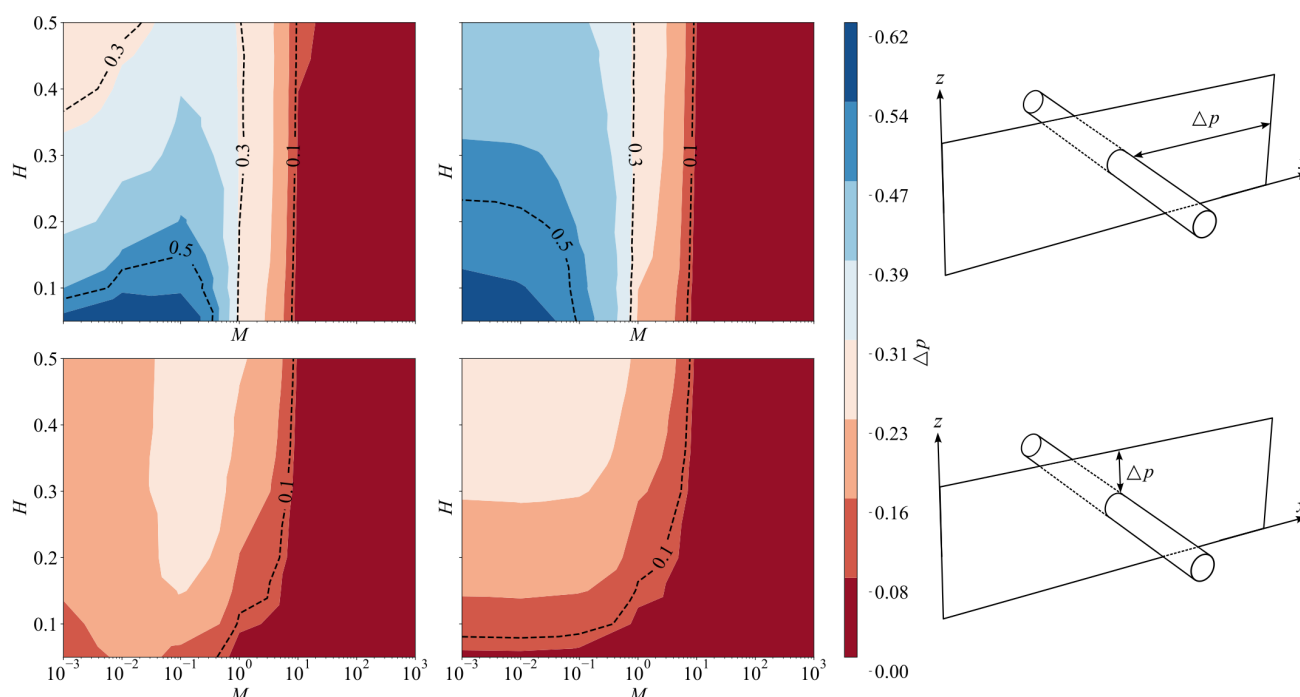


Рис. 5. Зависимость потерь давления по всей трещине (а) и по ее высоте (б) от проводимости трещин и высоты пласта при $N = 10$, $h = 0.6$; слева – внешняя трещина, справа – внутренняя

Увеличение числа трещин N при фиксированной длине скважины ожидаемо приводит к сокращению доли притока к стволу скважины при любых значениях остальных параметров задачи (рис. 6). Падение функции $\eta(N)$ происходит нелинейно, замедляясь с ростом числа трещин.

Более сложное поведение величины η наблюдается в координатах (M, h) (рис. 7). Пренебрежение притоком к стволу скважины оказывается возможным при одновременном сочетании больших значений длины h трещин и их проводимости M . Причем при малой проводимости $M < 1$ доля притока к стволу скважины практически не зависит от длины трещин и монотонно возрастает при дальнейшем понижении M , приближаясь к 90% уже при $M \approx 0.1$.

В ряде случаев сохранение половины расстояния d между трещинами МГРП, связывающего параметры (L, N) по формуле (12), приводит к схожему отношению продуктивности ствола скважины и трещин гидроразрыва (рис. 8). Это может упростить прогноз продуктивности скважины с МГРП за счет сокращения на единицу числа независимых параметров.

2.2 Относительный прирост продуктивности скважины

Эффективность МГРП на горизонтальной скважине будем вычислять как отношение суммарного дебита q скважины с трещинами МГРП к дебиту q_0 скважины без трещин и оценим ее зависимость от всех параметров задачи.

Рассмотрим влияние на эффективность МГРП его проектных параметров, которыми можно управлять – M, N, h , при фиксированной полувысоте H пласта и длине L горизонтальной скважины. На рис. 9, а) показан затухающий рост эффективности МГРП с увеличением числа трещин. В зависимости от проводимости трещин и их длины можно достигать прироста продуктивности скважины от двукратного до десятикратного размера при увеличении числа трещин от 1 до 10. Целесообразное количество трещин, дальнейшее увеличение которого не приводит к значимому приросту продуктивности скважины, увеличивается с ростом длины трещин. Увеличение длины трещин приводит к нелинейному росту эффективности

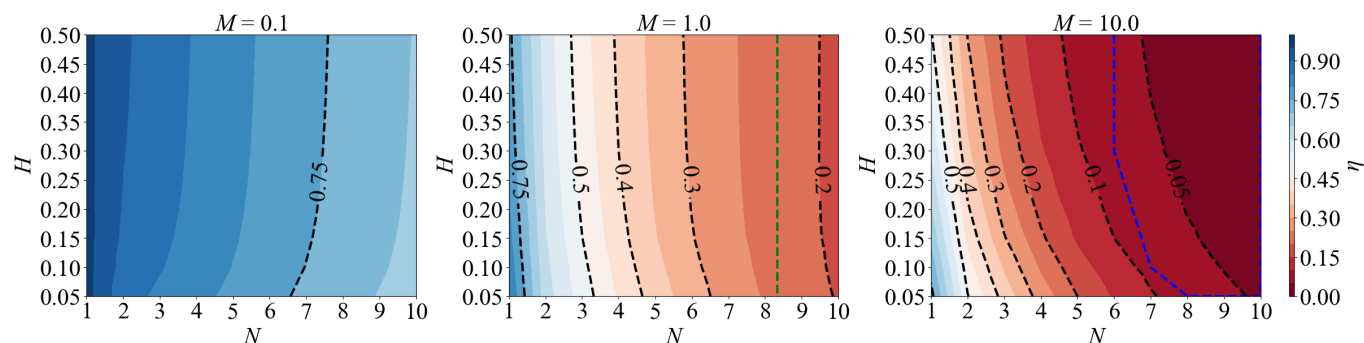


Рис. 6. Зависимость доли притока к стволу скважины от числа трещин и высоты пласта для разных проводимостей трещин при $h = 0.6, L = 5$

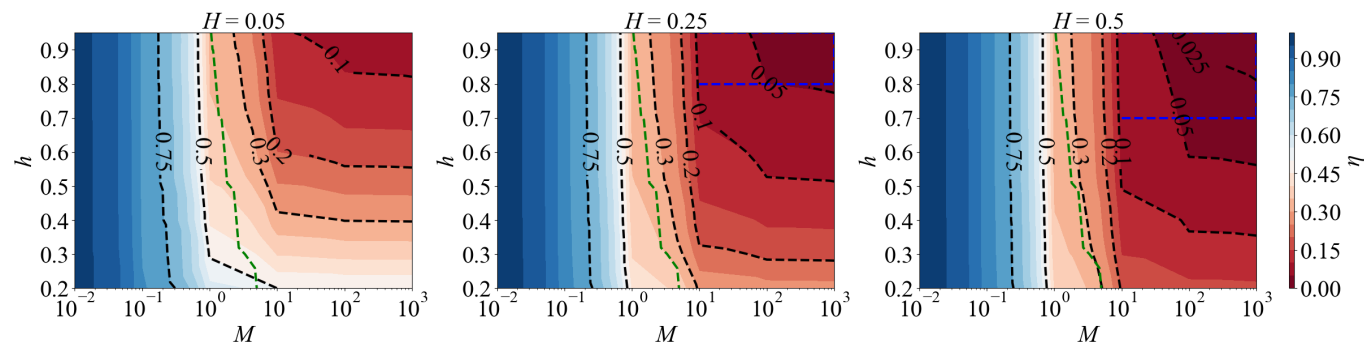


Рис. 7. Зависимость доли притока к стволу скважины от проводимости и длины трещин для разной высоты пласта при $L = 5, N = 5$

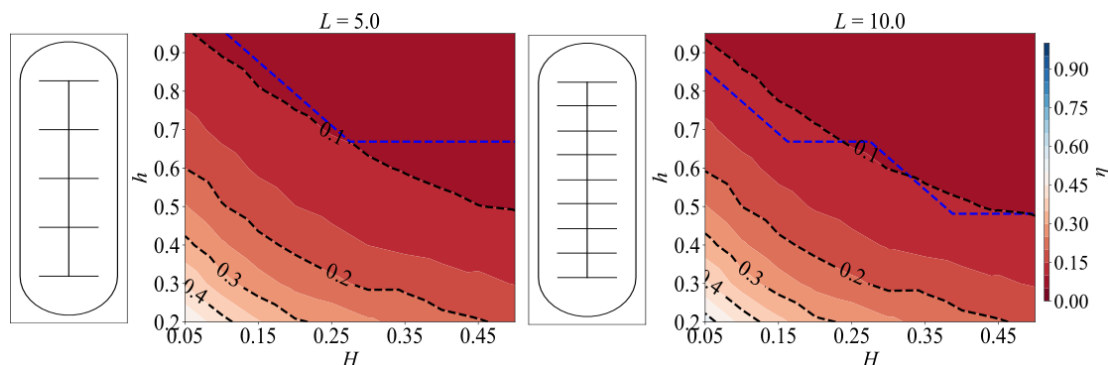


Рис. 8. Зависимость доли притока к стволу скважины от высоты пласта и длины трещин при сохранении расстояния между ними и их проводимости $M = 10$: слева – $L = 5, N = 5$; справа – $L = 10, N = 10$

МГРП (рис. 9, б). Этот эффект усиливается с ростом проводимости M , когда снижаются потери давления в трещинах (рис. 5).

Рис. 9, в) подтверждает, что увеличение проводимости трещин выше $M = 100$ практически не приводит к дополнительному приросту эффективности, и трещины ведут себя как бесконечно проницаемые. Основной прирост эффективности МГРП происходит на интервале значений $1 < M < 10$. При малой проводимости трещин $M < 0.1$ проведение МГРП нецелесообразно.

Карты эффективности, представленные на рис. 10, могут быть использованы для определения условий взаимной компенсации длины и количества трещин МГРП для достижения заданной продуктивности скважины. С точки зрения интенсификации отбора увеличение полудлины трещин оказывается эффективнее, чем увеличение их количества, при сохранении суммарной длины всех трещин. Такой эффект объясняется приближением торцов трещин к фиксированному контуру питания заданного давления.

Зависимость эффективности МГРП от высоты пласта при значительной проводимости трещин ($M = 10$) оказывается близка к линейной при любых значениях длины и количества трещин (рис. 11).

Увеличение длины скважины при фиксированных параметрах и числе трещин приводит к снижению относительного прироста продуктивности скважины (рис. 12) от МГРП. Двукратное увеличение длины скважины, а вместе с ней и расстояния между трещинами, приводит к сокращению эффективности МГРП примерно в 1.5 раза.

2.3 Применимость упрощенных формул эффективности МГРП

Все модели расчета продуктивности горизонтальных скважин с МГРП можно разделить на 3 типа: численные, аналитические и численно-аналитические. Каждая из них, в свою очередь, может учитывать такие факторы, как приток к стволу горизонтальной скважины, проницаемость трещин МГРП, их форму. В зависимости от цели исследования использование ресурсоемкой полномасштабной численной модели может быть либо невозможным, либо нецелесообразным. В таких случаях предпочтение отдается приближенным (упрощенным) аналитическим моделям. Однако не все они обеспечивают достаточную для решения конкретных задач точность. Напомним, что в данной работе рассматриваются модели только для установившегося притока к трещинам ГРП.

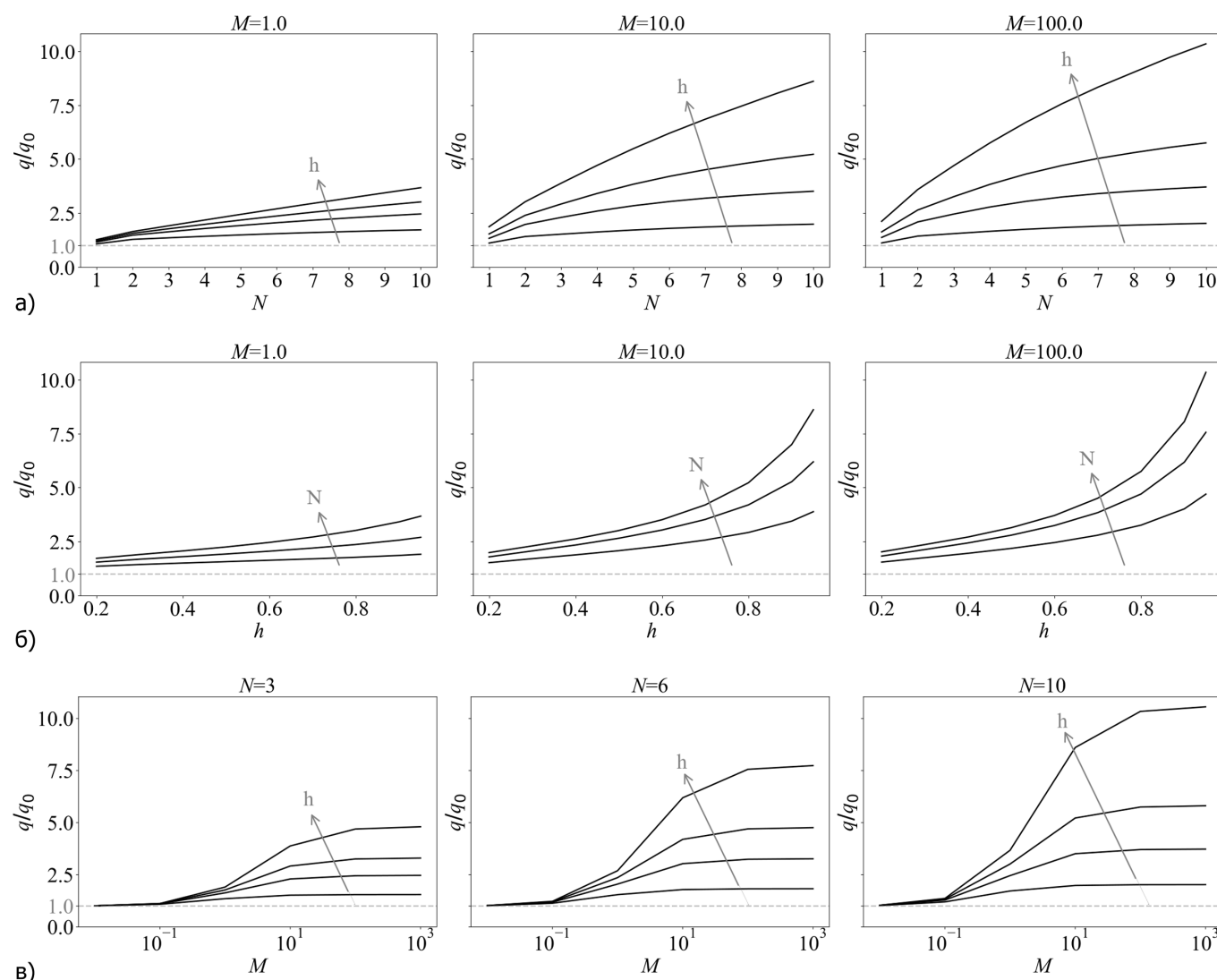


Рис. 9. Эффективность МГРП в зависимости от управляемых параметров M , N , h при $L = 5$, $H = 0.25$: а), в) $h = 0.2, 0.4, 0.8, 0.95$; б) $N = 3, 6, 10$

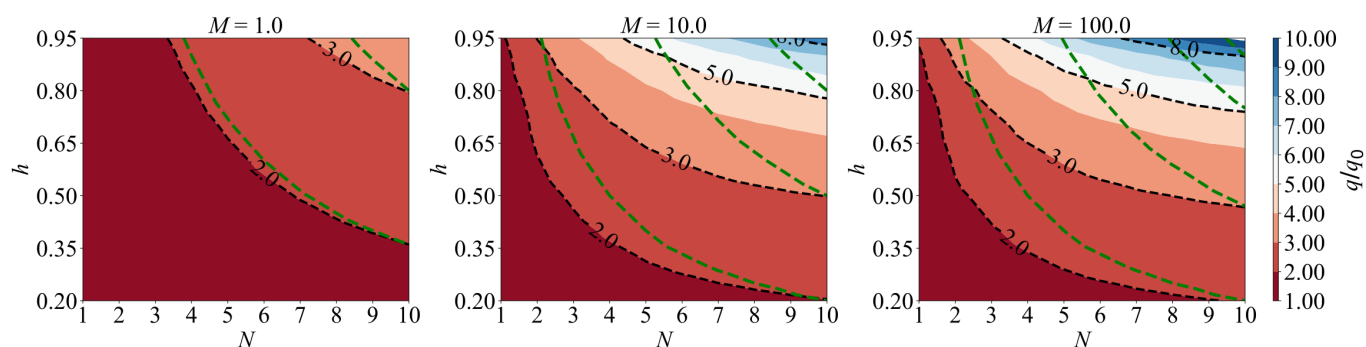


Рис. 10. Карты эффективности МГРП в зависимости от длины и числа трещин при $L = 5$, $H = 0.25$; зеленым – изолинии суммарной длины трещин $Nh = c$

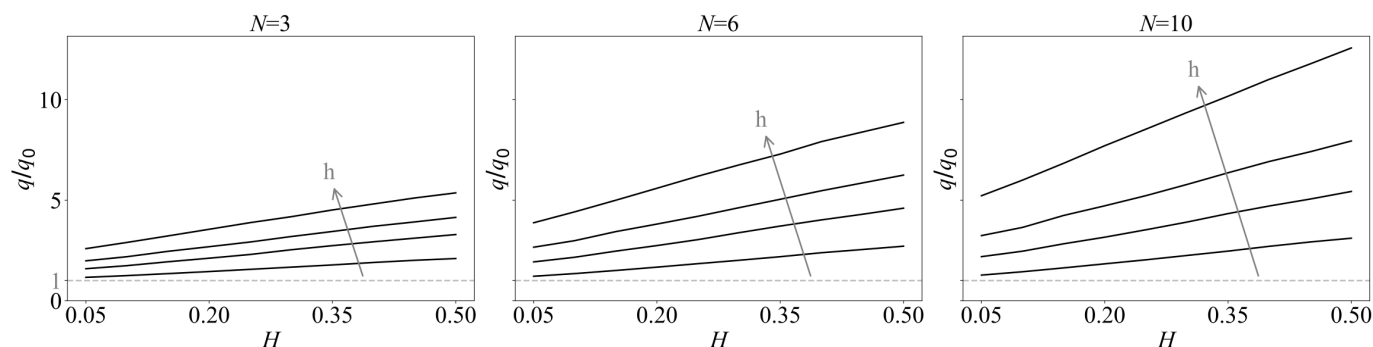


Рис. 11. Эффективность МГРП в зависимости от высоты пласта при $L = 5$, $M = 10$, $h = 0.2, 0.4, 0.8, 0.95$

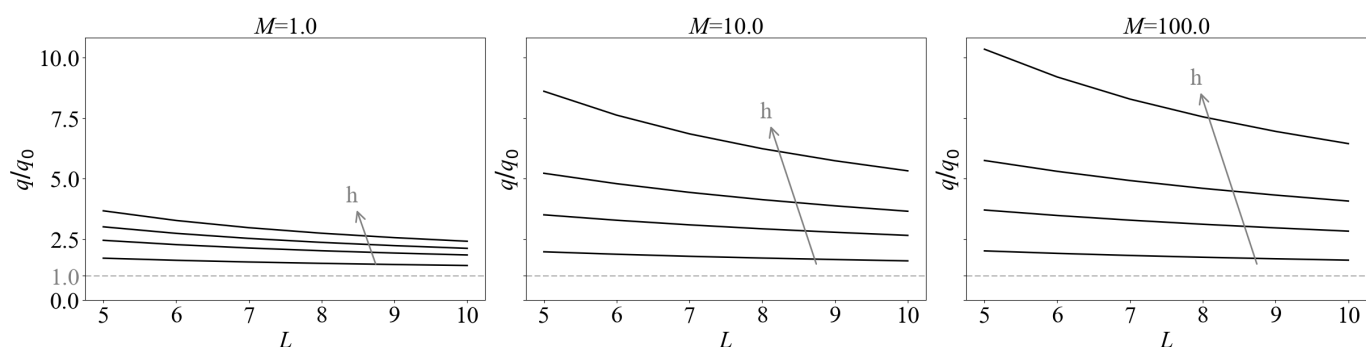


Рис. 12. Эффективность МГРП в зависимости от длины скважины при $N = 10$, $H = 0.25$, $h = 0.2, 0.4, 0.8, 0.95$

Оценка области применимости моделей (Mukherjee, Economides, 1991) и (Li et al., 1996) для скважин с трещинами МГРП бесконечной проницаемости была представлена в работе (Potashev et al., 2024). Там же предложена новая более надежная модель расчета продуктивности таких скважин, основанная на аналитических решениях для двух типов зон дренирования трещинами пласта и учитывающая произвольное число, размеры и расстояние между трещинами.

Обратим внимание на аналитические методы оценки продуктивности горизонтальной скважины с трещинами МГРП конечной проницаемости. Основными недостатками ряда подобных моделей являются либо значительное упрощение характера фильтрационных потоков, либо сложность реализации расчетного алгоритма. Например, в работе (Yuan, 2010) дается простая в использовании, но чрезмерно упрощенная модель – расчетный дебит скважины линейно зависит от проницаемости трещин и не зависит от проницаемости пласта. Применимость подобных моделей в данной работе не оценивается.

В работе (Wei, Economides, 2005) областью решения задачи является пласт бесконечной протяженности. Приток к трансверсальной трещине рассматривается на участке радиуса половины высоты пласта вокруг скважины. Течение из пласта в трещины считается линейным, внутри трещин вблизи горизонтальной скважины поток переходит в радиальный (Economides et al., 1994) Поток происходит из пласта в трещину и из трещины в скважину. Приток к остальной части ствола скважины пренебрежимо мал. Такая комбинация потоков ведет к дополнительному падению давления, которое может быть учтено с помощью скин-эффекта (Mukherjee, Economides, 1991), вычисляемого через проницаемость и высоту пласта, радиус скважины, проницаемость и ширину раскрытия трещины. Продуктивность трансверсальной трещины на горизонтальной скважине с учетом скин-эффекта вычисляется через продуктивность вертикальной скважины с ГРП. Для случая нескольких трещин МГРП авторы определяют эквивалентное количество вертикальных скважин с одной трещиной, которые дают такую же

продуктивность как МГРП. Такая модель не учитывает интерференцию соседних трещин, а продуктивность скважины не зависит от расстояния между ними.

В работе (Raghavan, Joshi, 1993) представлен способ применения метода суперпозиции для расчета продуктивности ГС с МГРП. Для этого суммарный дебит такой скважины вычисляется как сумма элементарных решений для отдельных вертикальных трещин с заданным давлением на трещинах и на круговом контуре питания вокруг каждой из них. Ограничениями подхода являются предположение о бесконечной проницаемости трещин, требование, чтобы расстояние между трещинами было значительно больше их максимальной длины для существования круговых контуров питания и необходимость задания их радиусов и соответствующей величины давления.

Модель из работы (Li et al., 1996) учитывает наличие перфорации скважины на участках между трещинами и конечную проницаемость пласта. Отдельно учитывается приток к торцевым трещинам и различное расстояние между каждой парой трещин. Область дренирования полагается в виде прямоугольника, границы которого равноудалены от скважины. Выделяются две области течения: в пласте от контура дренирования к трещинам и в трещинах к скважине. Область дренирования может быть поделена на N подобластей вдоль ствола скважины с трещиной в центре. Суммарный дебит скважины складывается из притоков в каждой подобласти.

Модель, предложенная в (Guo, 2009), не учитывает перфорацию ствола скважины вне соприкосновения с трещинами. Контур питания с постоянным давлением задается радиусом дренирования, который зависит от числа трещин, их средней длины и среднего расстояния между ними. Модель учитывает радиальное течение вне зоны расположения трещин, линейный приток к берегам трещин, линейный поток в трещинах вдали от скважины и радиальный вблизи нее. При расчете дебита для каждой отдельной трещины задается длина, ширина, проницаемость и расстояние до соседних трещин.

Предложенная в работе (Мазо, 2015) модель основывается на различных видах симметрии фильтрационного течения в отдельных зонах прискважинной области с трещинами конечной проводимости. Модель является численно-аналитической и сводится к одномерному уравнению для давления в трещине ГРП и набору аналитических формул для расчета притока из пласта в скважину и из пласта в трещину ГРП. Трещины ГРП моделируются независимыми друг от друга, а их геометрия ограничена квадратом. Если предположить, что трещина бесконечной проводимости, то модель становится аналитической.

Данная модель хорошо согласуется с трехмерной численной моделью.

Для оценки точности аналитических моделей введем относительную невязку полученного с их помощью дебита q_a от дебита q_n , полученного из численного решения задачи, которое будем считать «точным»:

$$E = (q_a - q_n)/q_n. \quad (13)$$

Оценивать погрешность моделей будем при значениях параметров задачи, соответствующих типичным условиям: скважине длиной 1 км и пласту с половиной высоты 10 м. При расстояниях между скважинами 300..500 м такие условия приводят к нормированным параметрам $L \approx 5$, $H \approx 0.05$.

На рис. 13 приведены карты невязки (13) $E(M, h)$ дебита по формуле (Li et al., 1996) при фиксированных N , L , H в отсутствие перфорации скважины. Область применимости данной формулы в пределах 20 % ограничена значениями проводимости трещин $M > 0.1$ и образует полосу, вдоль которой происходит 2..3 кратное сокращение полудлины трещин с ростом их проводимости. Увеличение числа трещин N приводит к более значительному снижению их длины, обеспечивающей низкую погрешность формулы. Так, при $M > 1$ и $N = 3.5$ формула применима для $h \approx 0.5$, а при $N = 10$ – уже для $h \approx 0.2$, что при указанных масштабах эквивалентно полудлине трещин 100 м и 40 м соответственно.

На рис. 14 приведена зависимость нормированного дебита (продуктивности) скважины с МГРП, вычисленного различными способами при фиксированных размерных величинах $L = 1000$ м, $R = 200$ м, $h = 100$ м, $2H = 10$ м, $\Delta p = 20$ атм, $k = 0.1$ Д, $r_w = 8$ см, $\mu = 1$ сП, что соответствует безразмерным параметрам $L = 5$, $h = 0.5$, $2H = 0.05$, $r_w = 0.0004$.

Применение модели (Potashev et al., 2024) ограничено лишь случаем трещин бесконечной проводимости, когда $M > 10$, и на этом интервале показывает наилучшее совпадение с численным решением задачи. В виду ограничения на минимальное значение радиуса дренирования $R = h + 0.75d$ дебит по данной модели вычислен для значений $N \geq 5$.

Модель (Guo, 2009) (рис. 14) стабильно дает многократное занижение дебита. Однако важно отметить, что интерпретация параметров, необходимых для оснащения модели, по представленной в публикации информации не является очевидной, что может служить дополнительным источником погрешности вычислений. При вычислениях, представленных в настоящей работе, была произведена попытка интерпретации параметров, приводящей к наилучшему совпадению с численным решением.

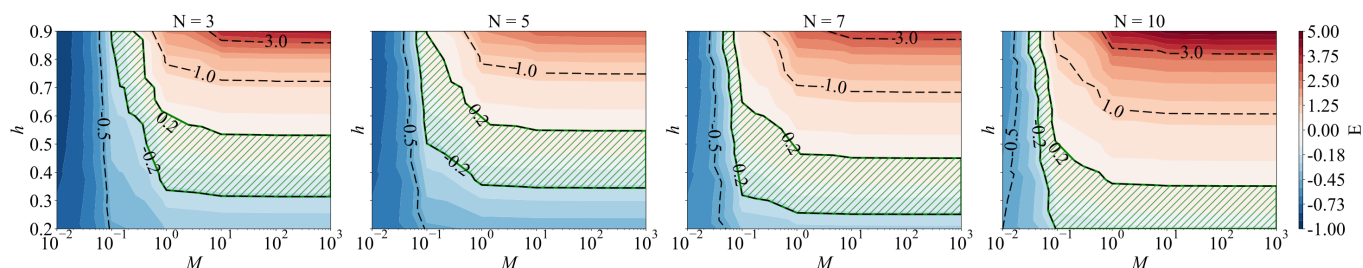


Рис. 13. Относительная погрешность формулы (Li et al., 1996), $H = 0.05$, $L = 5$

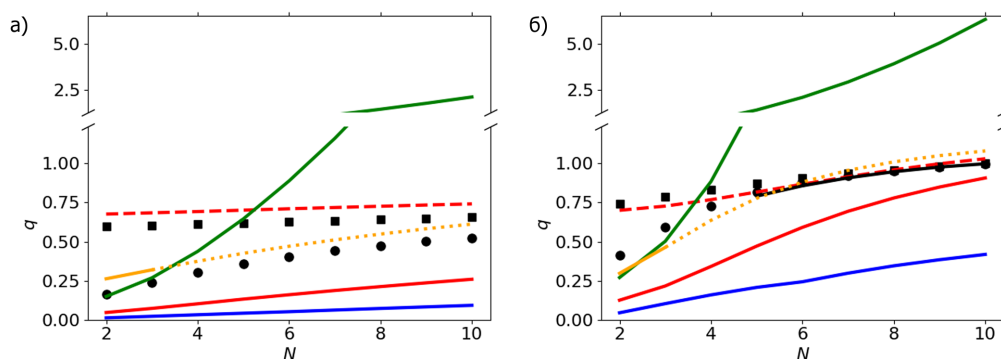


Рис. 14. Расчетный нормированный дебит скважины с МГРП: а) $M = 0.1$, б) $M=100$; маркеры $\bullet$, $\blacksquare$ – численное решение для изолированной и вскрытой скважины; линии – аналитические модели: черный – (Potashev et al., 2024); синий – (Guo, 2009); зеленый – (Guo, Schechter, 1997); красный – (Li et al., 1996) (пунктиром для перфорированной скважины); оранжевый – (Елкин и др, 2016) (пунктиром в области пересечения радиусов дренирования)

Модель (Guo, Schechter, 1997) лучше согласуется с численным решением при малом числе трещин, когда среднее расстояние между ними довольно велико. По-видимому, это связано с предположением о линейности притока из пласта к трещинам, которое нарушается при сближении трещин и искривлении линий тока.

Среди перечисленных физически обоснованных моделей наиболее надежной выглядит модель (Li et al., 1996) – для случая перфорированного ствола скважины ее погрешность в широком диапазоне параметров N , M не превосходит 15%, однако для изолированного ствола скважины она возрастает, принимая значения от 9 до 72%.

Существуют и другие методы приближенной оценки продуктивности скважин с МГРП. Например, можно рассмотрим, представленную в работе (Елкин, 2016). Вывод формулы накладывает ограничения на половину расстояния между трещинами d , требуя, чтобы области дренирования каждой трещины значительно не пересекались. Отметим, что область применимости данной модели, обеспечивающая условие непересечения радиусов дренирования соседних трещин, в противоположность модели из (Potashev et al., 2024), ограничена условием довольно больших расстояний между ними. В рассмотренном случае это всего не более 3–4 трещин с полудлиной 100 м на скважину длиной 1 км. Расчет по данной модели для большего числа трещин был выполнен в пренебрежении указанными авторами условиями применимости модели (рис. 14) и тем не менее дал хорошие результаты на всем рассмотренном интервале значений N при данной конфигурации параметров. Однако, поскольку такие расчеты не имеют строгого физического обоснования – например, при $N = 10$ в радиус дренирования каждой трещины попадают по две соседние трещины с каждой стороны, – то они могут рассматриваться в качестве подходящей аппроксимации продуктивности скважин. Вопрос применимости подобных формул должен рассматриваться с более тщательным расширенным варьированием исходных параметров задачи.

Не смотря на кажущуюся простоту представленных в аналитическом виде моделей, все они требуют внимательной интерпретации определяющих параметров, что не всегда оказывается очевидной задачей. В связи с этим для упрощения использования всех перечисленных в данной работе методов оценки продуктивности

горизонтальных скважин с МГРП была разработана расчетная программа, исходный код которой доступен по ссылке <https://github.com/FlowPorousMedia/MSHF.Productivity>. С ее помощью по заданным параметрам пласта, скважины и трещин МГРП можно получить все варианты оценки дебита скважины.

Заключение

Представлена математическая постановка и алгоритм сопряженного численного решения методом конечных объемов задачи об установившемся притоке пластового флюида к трещинам многозонного гидроразрыва и к стволу горизонтальной скважины. Достоверность и высокая точность используемого метода численного решения показана на основе сравнения со специализированным программным обеспечением с открытым исходным кодом.

На основе вычислительного эксперимента выполнена оценка вклада притока пластового флюида к стволу скважины в общий дебит скважины с МГРП и получены соотношения всех основных параметров задачи, когда притоком к стволу скважины можно пренебречь по сравнению с притоком к трещинам гидроразрыва и использовать упрощенные модели течений. С этой целью предложена формулировка нового критерия, определяющего допустимую длину трещин по длине скважины, числу трещин и высоте пласта с ограничениями на число трещин, их проводимость и расстояние между ними. Показано значительное превосходство надежности данного критерия по сравнению с известным аналогом.

Выполнен многопараметрический анализ эффективности МГРП с точки зрения повышения продуктивности горизонтальной скважины в широком интервале значений всех параметров задачи. Указаны условия целесообразности выполнения МГРП. Построены все базовые номограммы эффективности для проектирования МГРП, в том числе для достижения заданной эффективности за счет выбора между длиной трещин и их количеством.

Проведена оценка точности наиболее обоснованных упрощенных наиболее физически обоснованных моделей продуктивности горизонтальной скважины с МГРП. Установлены условия их применимости при заданном допустимом уровне погрешности.

Финансирование/Благодарности

Работа выполнена в Научно-исследовательском центре «Курчатовский институт» в рамках государственного задания.

Авторы благодарят рецензентов за внимание к рукописи и ценные замечания, которые, несомненно, способствовали улучшению работы.

Литература

- Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. (1984). Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 211 с.
- Елкин С.В., Алероев А.А., Веремко Н.А., Чертенков М.В. (2016). Учет влияния безразмерной проводимости на экспресс-расчет дебита жидкости после многозонного гидроразрыва пласта. *Нефтяное хозяйство*, 12, с. 110–113.
- Каневская Р.Д. (1999). Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. Москва: Недра, 204 с.
- Мазо А.Б., Поташев К.А., Хамидуллин М.Р. (2015). Фильтрационная модель притока жидкости к горизонтальной скважине с многостадийным гидравлическим разрывом пласта. *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 157 (4), с. 133–148.
- Мазо А.Б., Хамидуллин М.Р. (2017). Явно-неявные алгоритмы ускорения расчета двухфазного притока к горизонтальной скважине с многостадийным гидроразрывом пласта. *Выч. мет. программирование*, 18 (3), с. 204–213.
- Присмотров К.В., Варавва А.И., Воронинская Я.Г. (2023). Особенности методики моделирования многостадийного гидроразрыва пласта на скважинах газоконденсатного месторождения Х. *Георесурсы*, 25(4), с. 82–91. <https://doi.org/10.18599/grs.2023.4.5>
- Симонов М.В., Рошкеттаев А.П. (2017). Модель притока к горизонтальной скважине с многостадийным гидроразрывом пласта для расчета дебита сланцевого газа и нефти. *ПРОНЕФТЬ. Профессионально о нефти*, с. 25–30.
- Хамидуллин М.Р. (2016). Численное моделирование притока однофазной жидкости к горизонтальной скважине с трещинами многостадийного гидроразрыва пласта. *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 158 (2), с. 287–301.
- Христианович С.А., Михлин С.Г., Девисон Б.Б. (1938). Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Москва: Издательство АН СССР, 407 с.
- Butler R., Suprunowicz R. (1996). The effect of vertical fractures upon the performance of horizontal wells when coning can occur. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 35 (2), pp. 45–54.
- Economides M., Oligney R., Valkó P. (2001). Unified Fracture Design: Bridging the Gap Between Theory and Practice. Orsa Press, 262 p.
- Economides M., Hill, A. Ehlig-Economides C. (1994). Petroleum Production System. New Jersey: Prentice Hall. 624 p.
- Frih N., Martin V., Roberts J.E., Saada A. (2012). Modeling fractures as interfaces with nonmatching grids. *Computer Geosciences*, 16, pp. 1043–1060. <https://doi.org/10.1007/s10596-012-9302-6>
- Gidley J., Holditch S., Nierode D., Veatch R. (1989). Recent Advances in Hydraulic Fracturing. *Society of Petroleum Engineers*, 318 p.
- Giger F., Reiss L., Jourdan A. (1984). The Reservoir Engineering Aspects of Horizontal Drilling, paper SPE 13024 presented at SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston.
- Guo B., Schechter D. (1997). A Simple and Rigorous Mathematical Model for Estimating Inflow Performance of Wells Intersecting Long Fractures. Paper SPE 38104 presented at the SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, Kuala Lumpur. <https://doi.org/10.2118/38104-MS>
- Guo B., Yu X., Khoshghadam M. (2009). Simple Analytical Model for Predicting Productivity of Multifractured Horizontal Wells. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering* 12 (06), pp. 879–885. <https://doi.org/10.2118/114452-PA>
- Hyman J., Karra S., Makedonska N., Gabel C., Painter S., Viswanathan H. (2015). dfnWorks: A discrete Fracture network framework for modeling subsurface flow and transport. *Computers & Geoscience*, 84, pp. 10–19. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2015.08.001>
- Joshi S. (1988). Augmentation of Well Productivity With Slant and Horizontal Wells, *Journal of Petroleum Technology*, 75, pp. 729–739. <https://doi.org/10.2118/15375-PA>
- Li H., Jia Zh., Wei Zh. (1996). A New Method to Predict Performance of Fractured Horizontal Wells. International Conference on Horizontal Well Technology, Calgary, Alberta, Canada. <https://doi.org/10.2118/37051-MS>
- Lie K.-A. (2019). An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB/GNU Octave: User Guide for the MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST). Cambridge University Press, 678 p. <https://doi.org/10.1017/9781108591416>
- Long J., Remer J., Wilson C., Witherspoon P. (1982). Porous Media Equivalents for Networks of Discontinuous Fractures. *Water Resources Research*, v.18, pp. 645–658. <https://doi.org/10.1029/WR018i003p00645>
- Mazo A., Khamidullin M., Potashev K. (2017). Numerical simulation of a one-phase steady flow towards a multistage fractured horizontal well. *Lobachevskii journal of mathematics*, v.38, pp. 818–826. ISSN 1818-9962. <https://doi.org/10.1134/S1995080217050183>
- Mazo A., Potashev K., Khamidullin M. (2019). Simplified Model to Estimate Productivity of Horizontal Well with Multistage Hydraulic Fracturing. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, v.40 (8), pp. 1186–1193. <https://doi.org/10.1134/S199508021908016X>
- Mazo A., Khamidullin M., Potashev K., Uraimov A. (2024). Mathematical Model of Water- and Oil-Soluble Tracers Transfer in Studying Multistage Hydraulic Fracturing. *Fluid Dynamics*, v.59(3), pp. 427–443. <https://doi.org/10.1134/S0015462824600287>
- Mukherjee H., Economides M. (1991). A Parametric Comparison of Horizontal and Vertical Well Performance. *SPE Formation Evaluation*, 6(02), pp. 209–216. <https://doi.org/10.2118/18303-pa>
- Ozkan E., Brown M., Raghavan R., Kazemi H. (2009). Comparison of fractured horizontal-well performance in conventional and unconventional reservoirs. Paper presented at the SPE Western Regional Meeting, San Jose, California, pp. 345–360. <https://doi.org/10.2118/121290-MS>
- Potashev K., Mazo A., Mukhina M., Uraimov A., Maklakov D., Khamidullin M. (2024). High-speed algorithm for computing the inflow to multiple-fractured horizontal wells using stream tubes. *Comput Geosci*, 28, pp. 1389–1411. <https://doi.org/10.1007/s10596-024-10322-w>
- Prats M. (1961). Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior Incompressible Fluid Case, *Society of Petroleum Engineers Journal*, pp. 105–118. <https://doi.org/10.2118/1575-G>
- Raghavan R., Joshi S. (1993). Productivity of Multiple Drainholes or Fractured Horizontal Wells. *SPE Formation Evaluation* 8 (01), pp. 11–16. <https://doi.org/10.2118/21263-PA>
- Robinson P. (1984). Connectivity, flow and transport in network models of fractured media. [PhD thesis]. University of Oxford.
- Tan X.-H., Jiang L., Li X.-P., Zhang B.-J., Li X.-C. (2018). Flow model of a multi-stage hydraulic fractured horizontal well based on tree-shaped fractal fracture networks. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Volume 169, pp. 494–503. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.06.008>
- Wei Y., Economides, M.J. (2005). Transverse hydraulic fractures from a horizontal well. *Proceedings. Paper presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Dallas, Texas, <https://doi.org/10.2118/94671-MS>
- Xing F., Masson R., Lopez S. (2017). Parallel vertex approximate gradient discretization of hybrid dimensional Darcy flow and transport in discrete fracture networks. *Computer Geoscience*, v.21, pp. 595–617. <https://doi.org/10.1007/s10596-016-9606-z>
- Yuan H., Zhou D. (2010). A New Model for Predicting Inflow Performance of Fractured Horizontal Wells. *SPE Western Regional Meeting*, Anaheim, California, USA. <https://doi.org/10.2118/133610-MS>
- Zhang H., Han G., Houeto F., Lessard R., Wang W., Li J. (2012). New Methods to Predict Inflow Performance of Multiply Fractured Horizontal Wells under Two-Phase Condition and Optimize Number of Fracture Stages. *North Africa Technical Conference and Exhibition*, Cairo, Egypt. <https://doi.org/10.2118/152837-MS>

Сведения об авторах

Марсель Рашидович Хамидуллин – м.н.с., лаборатория суперкомпьютерного моделирования, Научно-исследовательский центр «Курчатовский институт», Россия, Москва
e-mail: marseille.ksu@gmail.com

Константин Андреевич Поташев – д.ф.-м.н., зав. кафедрой аэрогидромеханики, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет
Россия, 420008, Казань, ул. Кремлевская, д. 18
e-mail: kpotashev@mail.ru

Александр Бенцианович Мазо – д.ф.-м.н., профессор,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского,
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Россия, 420008, Казань, ул. Кремлевская, д. 18
e-mail: abmazo1956@mail.ru

Статья поступила в редакцию 25.03.2025;
Принята к публикации 09.07.2025; Опубликована 20.12.2025

IN ENGLISH

ORIGINAL ARTICLE

Productivity of Multi-Stage Hydraulic Fractured Horizontal Wells and Methods for Its Estimation

M.R. Khamidullin^{1,2*}, K.A. Potashev^{2,3}, A.B. Mazo²

¹National Research Centre «Kurchatov Institute», Moscow, Russian Federation

²Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation

³Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russian Federation

*Corresponding author: Marsel R. Khamidullin, e-mail: marseille.ksu@gmail.ru

Abstract. A multi-parameter quantitative analysis of horizontal well productivity with multistage hydraulic fracturing under steady-state flow conditions was performed, based on a high-precision numerical solution of the 3D problem on a detailed finite-volume grid. The conditions justifying the application of multistage fracturing were identified along with the interrelationship of the main system parameters to achieve a target well productivity level. The conditions were established and an analytical form of an approximate criterion was proposed for when the inflow to the wellbore is negligible compared to the inflow to the hydraulic fractures. The accuracy and applicability conditions of the most substantiated simplified analytical models for productivity calculation were evaluated.

Keywords: horizontal wells, multistage hydraulic fracturing, steady-state flow, well productivity, analytical models, numerical simulation, empirical formulas

Recommended citation: Khamidullin M.R., Potashev K.A., Mazo A.B. (2025). Productivity of Multi-Stage Hydraulic Fractured Horizontal Wells and Methods for Its Estimation. *Georesursy = Georesources*, 27(4). <https://doi.org/10.18599/grs.2025.4.6>

Acknowledgements

The work was carried out with financial support from the Scientific Research Center “Kurchatov Institute” within the framework of the government assignment (project no. FNEF-2024-0016)

References

- Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. (1984). Dvizhenie zhidkostey i gazov v prirodnykh plastakh. – M.: Nedra, 211 p. (In Russian)
- Butler R., Suprunowicz R. (1996). The effect of vertical fractures upon the performance of horizontal wells when coning can occur. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 35 (2), pp. 45–54.
- Economides M., Oligney R., Valkó P. (2001). Unified Fracture Design: Bridging the Gap Between Theory and Practice. Orsa Press, 262 p.
- Economides M., Hill, A. Ehlig-Economides C. (1994). *Petroleum Production System*. New Jersey: Prentice Hall. 624 p.
- Elkin S.V., Aleroev A.A., Veremko N.A., Chertentkov M. V. (2016). Accounting for dimensionless conductivity in express calculation of flow-rate

in a well after multi-stage hydraulic fracturing. *Oil Industry Journal*, 12, pp. 110–113. (In Russian)

Frih N., Martin V., Roberts J.E., Saâda A. (2012). Modeling fractures as interfaces with nonmatching grids. *Computer Geosciences*, 16, pp. 1043–1060. <https://doi.org/10.1007/s10596-012-9302-6>

Gidley J., Holditch S., Nierode D., Veatch R. (1989). Recent Advances in Hydraulic Fracturing. *Society of Petroleum Engineers*, 318 p.

Giger F., Reiss L., Jourdan A. (1984). The Reservoir Engineering Aspects of Horizontal Drilling, paper SPE 13024 presented at SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston.

Guo B., Schechter D. (1997). A Simple and Rigorous Mathematical Model for Estimating Inflow Performance of Wells Intersecting Long Fractures. Paper SPE 38104 presented at the SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, Kuala Lumpur. <https://doi.org/10.2118/38104-MS>

Guo B., Yu X., Khoshgahdam M. (2009). Simple Analytical Model for Predicting Productivity of Multifractured Horizontal Wells. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering* 12 (06), pp. 879–885. <https://doi.org/10.2118/114452-PA>

Hyman J., Karra S., Makedonska N., Gabel C., Painter S., Viswanathan H. (2015). dfnWorks: A discrete Fracture network framework for modeling subsurface flow and transport. *Computers & Geoscience*, 84, pp. 10–19. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2015.08.001>

Joshi S. (1988). Augmentation of Well Productivity With Slant and Horizontal Wells, *Journal of Petroleum Technology*, 75, pp. 729–739. <https://doi.org/10.2118/15375-PA>

Kanevskaya R.D. (1999). Matematicheskoe modelirovanie razrabotki mestorozhdeniy nefi i gaza s primeneniem gidravlicheskogo razryva plasta. Moskva: Nedra, 204 p. (In Russian)

Khamidullin M.R. (2016). Numerical simulation of one-phase flow to multi-stage hydraulically fractured horizontal well. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 158(2), pp. 287–301. (In Russian)

Khristianovich S.A., Mikhlin S.G., Devison B.B. (1938). Nekotorye novye voprosy mekhaniki sploshnoy sredy. – Moskva: Izdatel'stvo AN SSSR, 407 p. (In Russian)

Li H., Jia Zh., Wei Zh. (1996). A New Method to Predict Performance of Fractured Horizontal Wells. *International Conference on Horizontal Well Technology*, Calgary, Alberta, Canada. <https://doi.org/10.2118/37051-MS>

Lie K.-A. (2019). An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB/GNU Octave: User Guide for the MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST). Cambridge University Press, 678 p. <https://doi.org/10.1017/9781108591416>

Long J., Remer J., Wilson C., Witherspoon P. (1982). Porous Media Equivalents for Networks of Discontinuous Fractures. *Water Resources Research*, v.18, pp. 645–658. <https://doi.org/10.1029/WR018i003p00645>

Mazo A.B., Potashev K.A., Khamidullin M.R. (2015). Filtration model of fluid inflow to a horizontal well with multi-stage hydraulic fracturing. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Estestvennye Nauki*. 157(4), pp. 133–148. (In Russian)

Mazo, A.B., Khamidullin, M.R. (2017). Explicit-implicit algorithms for accelerating the calculation of two-phase inflow to a horizontal well with multi-stage hydraulic fracturing. *Vychislitel'nye Metody i Programirovanie* 18(3), pp. 204–213 (In Russian)

Mazo A., Khamidullin M., Potashev K. (2017). Numerical simulation of a one-phase steady flow towards a multistage fractured horizontal well. *Lobachevskii journal of mathematics*, v.38, pp. 818–826. ISSN 1818-9962. <https://doi.org/10.1134/S1995080217050183>

Mazo A., Potashev K., Khamidullin M. (2019). Simplified Model to Estimate Productivity of Horizontal Well with Multistage Hydraulic Fracturing. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, v.40 (8), pp. 1186–1193. <https://doi.org/10.1134/S199508021908016X>

Mazo A., Khamidullin M., Potashev K., Uraimov A. (2024). Mathematical Model of Water- and Oil-Soluble Tracers Transfer in Studying Multistage Hydraulic Fracturing. *Fluid Dynamics*, v.59(3), pp. 427–443. <https://doi.org/10.1134/S0015462824600287>

Mukherjee H., Economides M. (1991). A Parametric Comparison of Horizontal and Vertical Well Performance. *SPE Formation Evaluation*, 6(02), pp. 209–216. <https://doi.org/10.2118/18303-pa>

Ozkan E., Brown M., Raghavan R., Kazemi H. (2009). Comparison of fractured horizontal-well performance in conventional and unconventional reservoirs. Paper presented at the SPE Western Regional Meeting, San Jose, California, pp. 345–360. <https://doi.org/10.2118/121290-MS>

Potashev K., Mazo A., Mukhina M., Uraimov A., Maklakov D., Khamidullin M. (2024). High-speed algorithm for computing the inflow to multiple-fractured horizontal wells using stream tubes. *Comput Geosci*, 28, pp. 1389–1411. <https://doi.org/10.1007/s10596-024-10322-w>

Prats M. (1961). Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior Incompressible Fluid Case, *Society of Petroleum Engineers Journal*, pp. 105–118. <https://doi.org/10.2118/1575-G>

Prismotrov K.V., Varavva A.I., Voroninskaya Ya.G. (2023) Multi-stage hydraulic fracturing simulation methodology at the wells of the gas condensate field X. *Georesursy = Georesources* 25(4), pp. 82–91. (In Russian) <https://doi.org/10.18599/grs.2023.4.5>

Raghavan R., Joshi S. (1993). Productivity of Multiple Drainholes or Fractured Horizontal Wells. *SPE Formation Evaluation* 8 (01), pp. 11–16. <https://doi.org/10.2118/21263-PA>

Robinson P. (1984). Connectivity, flow and transport in network models of fractured media. [PhD thesis]. University of Oxford.

Simonov M.V., Roshchiktaev A.P. (2017). Model pritochka k gorizontāl'noy skvazhine s mnogostadiynym gidrorazryvom plasta dlya rascheta debita slantsevogo gaza i nefli. *PRONEFT'*. Professional'no o nefli, pp. 25–30. (In Russian)

Tan X.-H., Jiang L., Li X.-P., Zhang B.-J., Li X.-C. (2018). Flow model of a multi-stage hydraulic fractured horizontal well based on tree-shaped fractal

fracture networks. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Volume 169, pp. 494–503. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.06.008>

Wei Y., Economides, M.J. (2005). Transverse hydraulic fractures from a horizontal well. *Proceedings. Paper presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas*, <https://doi.org/10.2118/94671-MS>

Xing F., Masson R., Lopez S. (2017). Parallel vertex approximate gradient discretization of hybrid dimensional Darcy flow and transport in discrete fracture networks. *Computer Geoscience*, v.21, pp. 595–617. <https://doi.org/10.1007/s10596-016-9606-z>

Yuan H., Zhou D. (2010). A New Model for Predicting Inflow Performance of Fractured Horizontal Wells. *SPE Western Regional Meeting, Anaheim, California, USA*. <https://doi.org/10.2118/133610-MS>

Zhang H., Han G., Houeto F., Lessard R., Wang W., Li J. (2012). New Methods to Predict Inflow Performance of Multiply Fractured Horizontal Wells under Two-Phase Condition and Optimize Number of Fracture Stages. *North Africa Technical Conference and Exhibition, Cairo, Egypt*. <https://doi.org/10.2118/152837-MS>

About the Authors

Marsel R. Khamidullin – junior research assistant, National Research Centre «Kurchatov Institute», Moscow, Russian Federation
e-mail: marseille.ksu@gmail.com

Konstantin A. Potashev – DSc (Physics and Mathematics), Head of Fluid Dynamics Department at Kazan (Volga Region) Federal University
18 Kremlevskaya St., Kazan, 420008, Russian Federation

Alexander B. Mazo – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Kazan (Volga Region) Federal University
18 Kremlevskaya St., Kazan, 420008, Russian Federation

Manuscript received 25 March 2025;

Accepted 9 July 2025;

Published 20 December 2025

© 2025 The Authors. This article is published in open access under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)