

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

DOI: <https://doi.org/10.18599/grs.2026.1.6>

УДК 552.086, 532.546, 514.83

Вычисление средней скорости потока флюида в пористой среде с помощью функционалов Минковского

М.В. Чернявский^{1*}, В.В. Тимошенко¹, А.И. Морковкин², П.А. Гришин², А.Б. Федотов¹, Е.А. Грачев¹

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия

Динамика флюидов в сложных неупорядоченных средах является важным предметом изучения в таких прикладных областях, как материаловедение, почвоведение, химическая инженерия, а также разработка месторождений нефти, газа и подземных вод. Методы интегральной геометрии представляют собой полезный инструмент для исследования сложных сред. В настоящей работе показано, что для всякого заданного типа (класса) пористых сред можно оценивать средние значения скорости потока флюида в каждом слое образца с помощью геометрических параметров (функционалов Минковского) порового пространства в данном слое. Такой подход позволит избежать проведения ресурсозатратных фильтрационных экспериментов и численного моделирования потоков для осуществления первичного анализа фильтрационных свойств образцов. Представлен метод построения моделей для оценки распределения средних значений скорости однофазного потока в образцах пористых сред с помощью их геометрических параметров, вычисляемых из бинаризованных изображений. Образцы из газовых резервуаров выбраны в качестве примеров пористой среды, с учетом растущей значимости данного типа резервуаров, вызванной глобальным переходом на природный газ как ключевой источник энергии. Проведено прямое сравнение результатов расчетных средних значений скоростей, полученных из моделей, со средними значениями, полученными из численного моделирования потоков в промышленных симуляторах. Результаты вычислений по построенным моделям с относительно высокой точностью воспроизводят тренды распределений средних скоростей, полученных из численного моделирования, что позволяет говорить о достаточно высокой степени статистической значимости построенных моделей. Это предоставляет полезный инструмент для быстрых и устойчивых вычислений для целей первичного анализа образцов в задачах моделирования и ремасштабирования (скейлинга).

Ключевые слова: пористые среды, уравнение Стокса, интегральная геометрия, функционалы Минковского

Для цитирования: Чернявский М.В., Тимошенко В.В., Морковкин А.И., Гришин П.А., Федотов А.Б., Грачев Е.А. (2026). Вычисление средней скорости потока флюида в пористой среде с помощью функционалов Минковского. *Георесурсы*, 28(1), с. 3–18. <https://doi.org/10.18599/grs.2026.1.6>

Введение

Динамика жидкостей и газов в сложных неупорядоченных средах представляет собой все более важный предмет исследований в ряде прикладных наук в связи с растущим спросом во многих практических областях, таких как материаловедение, почвоведение, инженерия подземных вод, химическая инженерия и, в особенности, нефтегазовая инженерия.

Информация о геологической структуре ядра и соответствующих параметрах потока флюида имеет решающее

значение для правильной оценки свойств пласта и эффективной добычи ископаемого топлива из недр.

Важное место в описании резервуаров занимает точное прогнозирование эффективных петрофизических свойств, которые характеризуют структуру ядра и его транспортные (фильтрационные) свойства. Описание резервуаров выполняется в различных масштабах: в масштабе нефтегазового поля, в масштабе ядра и в масштабе порового пространства (Scheidegger, 1957; Bear, 1975; Tiab, Donaldson, 2011; Satter, Iqbal, 2015).

На масштабе ядра основными свойствами, широко используемыми в промышленных приложениях, являются пористость, а также абсолютная и относительная проницаемость (Blunt, 2016; Blunt, 2017; Schoen, 2015). Различные подходы к моделированию и оценке абсолютной и относительной проницаемости занимают существенное место в петрофизическом анализе.

* Ответственный автор: Михаил Валерьевич Чернявский
e-mail: chernjavskiy.mv15@physics.msu.ru

© 2026 Коллектив авторов

Статья находится в открытом доступе и распространяется в соответствии с лицензией Creative Commons Attribution (CC BY) License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Эффективные свойства на масштабе зерна, такие как пористость и проницаемость, предоставляют в компактной форме важную информацию и могут использоваться для приблизительной оценки резервуаров. Однако, данные свойства не учитывают внутреннюю морфологию пор и топологическую структуру пористой среды.

Экспериментальные исследования динамики течения в пористых средах включают в себя различные численные моделирование, а также натурные фильтрационные эксперименты. Поток может быть однофазным (газ или газовый конденсат) или двухфазным (смесь газа и жидкости). В данной статье мы рассмотрим только случаи однофазного течения (только жидкая газоконденсатная фаза), поскольку многофазное течение зависит не только от геометрии порового пространства, но и от межфазного взаимодействия и обмена углеводородными компонентами. При этом, как будет показано далее, само течение для инертного флюида адекватно описывается функционалами Минковского (Matheron, 1974; Serra, 1983) с соответствующими параметрами, отражающими различия в плотности и вязкости рассматриваемой фазы. Численное моделирование обычно требует значительной вычислительной мощности и в основном выполняется с использованием параллельных вычислений на кластерах. Традиционные полномасштабные фильтрационные эксперименты с реальными образцами и жидкостями обычно требуют использования больших и дорогостоящих экспериментальных установок и, как правило, существенных временных затрат (Ferreol, Rothman, 1995; Ahmed, 2010; Satter, Iqbal, 2015).

Что касается описания самих образцов, одним из наиболее распространенных методов получения информации о внутренней пространственной структуре реальных образцов пористых сред является рентгеновская компьютерная микротомография (Hounsfield, 1973). Компьютерная микротомография (далее – микро-КТ) позволяет получить детальное представление о внутренней структуре образца пористой среды в виде трехмерного полутонового (в градациях серого) изображения, отражающего распределение рентгеновской плотности.

Для получения количественной информации о структуре образца и проведения любых численных симуляций потоков в образцах, необходимо бинаризовать исходные полутоновые изображения, полученные из микро-КТ (Cnudde, Boone, 2013). Обработка изображений охватывает широкий спектр различных методов бинаризации (Sezgin, Sankur, 2004; Sheppard et al., 2004). Метод Оцу (Otsu, 1979), основанный на минимизации внутриклассовой дисперсии интенсивности, является одним из самых популярных методов бинаризации полутоновых изображений. В этой работе в качестве входных данных используются уже бинаризованные томографические изображения.

В настоящей статье основное внимание уделяется детальной характеристике однофазных потоков в пористых средах с использованием инструментов интегральной геометрии, а также установлению связи геометрических параметров порового пространства со средней скоростью потока в каждом слое в образцах пористых сред. Интегральная геометрия предоставляет набор эффективных инструментов для количественной

оценки морфологических и структурных свойств пористых сред в масштабе порового пространства (Matheron, 1974; Bonnesen et al., 1988; Serra, 1983; Michielsen, Raedt, 2001). Инструменты представляют собой набор количественных характеристик, называемых функционалами Минковского. Функционалы Минковского имеют связь с некоторыми основными геометрическими характеристиками объектов в евклидовом пространстве. Например, в трехмерном пространстве существует 4 функционала Минковского, которые пропорциональны соответственно объему, площади поверхности, средней интегральной кривизне и эйлеровой характеристике. В двумерном пространстве существует 3 функционала Минковского, которые пропорциональны соответственно площади поверхности, периметру и эйлеровой характеристике.

Методы интегральной геометрии уже нашли свое применение в общей характеристике и классификации образцов пористых сред в различных практических областях (Adler, 1992; Arns et al., 2001; Arns et al., 2010; Ivonin et al., 2020; Ivonin et al., 2021; Kalnin et al., 2021), использовались для оценки эффективных петрофизических свойств (Arns et al., 2005; Scholz et al., 2012; Scholz et al., 2015; Liu et al., 2017; Armstrong et al., 2019; Xiong et al., 2019; Blunt et al., 2020; Slotte et al., 2020; Sibiriyakov et al., 2021; Haque et al., 2024), а также для описания капиллярного давления (McClure et al., 2018), и для характеристики морфологии капель нефти (Wang et al., 2022). В свою очередь, проблема характеристики скорости потока флюида в пористой среде через геометрию пор также представляет интерес для специалистов в области добычи углеводородов, однако до сих пор не была детально изучена.

В работе показано, что для заданного класса пористой среды средняя скорость потока в каждом слое для любого образца из того же класса (петротипа) может быть представлена как линейная функция функционалов Минковского, рассчитанных для двумерных сечений порового пространства, со статистически значимыми коэффициентами, полученными из линейной регрессии. Это дает инструмент для надежного и гибкого метода оценки потока флюида в образцах из известного класса без необходимости проведения ресурсоемких численных либо натуральных фильтрационных экспериментов.

В качестве примеров пористых сред в настоящей работе выбраны образцы из газовых пластов, из которых добывается как газ, так и газовый конденсат (флюид), в связи с растущей значимостью данного типа пластов, вызванной глобальным переходом к природному и сжиженному газу как ключевому источнику энергии. Движение жидкой фазы рассматривается как отдельный, более сложный случай по сравнению с газом, поскольку, в отличие от газа, жидкая фаза может перемещаться, не занимая при этом все доступное поровое пространство, а используя для течения «эффективную часть» порового пространства (при насыщенностях выше критической). Таким образом, базовая геометрия минерального скелета и эффективная геометрия для условий данной фазы, определяемая типом и свойствами рассматриваемого флюида, могут существовать одновременно и быть исходными данными для расчета параметров потока с использованием функционалов Минковского.

Цель настоящего исследования: разработать новый метод оценки пространственного распределения средней скорости потока флюида в пористой среде на основе значений геометрических характеристик порового пространства. Для её достижения поставлены следующие задачи:

1. количественно описать связь значений средней скорости флюида, протекающего в пористой среде, со значениями двумерных функционалов Минковского слоев порового пространства;

2. описать общий процесс построения в рамках произвольно заданного класса образцов (петротипа) модели для оценки распределения значений средней скорости потока флюида на основе значений двумерных функционалов Минковского;

3. на примере синтетических образцов и образцов из нефтегазовых коллекторов построить на основе функционалов Минковского оценки распределения значений средней скорости потока флюида в пористой среде.

Описание общего алгоритма исследования

В работе представлен алгоритм характеристики средней скорости потока флюида в пористой среде. Рассматривается простейший случай медленного однофазного потока. Общий алгоритм исследования можно разбить на 2 блока: блок построения модели и блок предсказания значений средней скорости потока с помощью построенной модели.

Обозначим как L произвольный класс пористой среды. Пусть известно, что Образец 1 и Образец 2 принадлежат классу L . Блок построения модели содержит следующие шаги:

1. выбор в классе L образца, например Образца 1, с использованием которого будет строиться модель;

2. получение информации о внутренней пространственной структуре Образца 1 в виде цифрового изображения (например, с использованием микро-КТ);

3. бинаризация исходного изображения образца;

4. проведение численной симуляции потока флюида на бинаризованном изображении образца, получение средних значений скорости потока в каждом слое образца, перпендикулярном оси, в направлении которой подается поток;

5. построение линейной регрессионной модели, которая устанавливает для образцов класса L связь между средней скоростью потока в каждом слое с геометрическими параметрами (функционалами Минковского) соответствующих данному слою слоев порового пространства.

Блок предсказания значений средней скорости потока с помощью построенной модели содержит следующие шаги:

1. выбор в классе L образца, например Образца 2, в котором необходимо предсказать средние скорости в каждом слое;

2. аналогично п. 2 из блока построения модели, но с использованием Образца 2;

3. аналогично п. 3 из блока построения модели, но с использованием Образца 2;

4. предсказание значений средней скорости потока в каждом слое Образца 2 с помощью регрессионной модели для образцов класса L .

При условии надежности построенных регрессионных моделей для каждого класса образцов такой алгоритм позволяет детально характеризовать распределение по слоям образцов средней скорости потока жидкости, основываясь только на геометрии образца, что исключает необходимость в дорогостоящем дополнительном численном моделировании.

Используемые образцы

Ввиду значительного практического интереса, керны из нефтегазоконденсатных резервуаров были выбраны в качестве примеров пористых сред. Образцы были отобраны из соображений репрезентативности и охвата основных типов резервуаров. Рассматриваемые образцы представляют интерес для широкого спектра геологических условий и часто используются в качестве объектов исследования или ссылок в реальных и численных петрофизических исследованиях. Это было сделано, с одной стороны, для того, чтобы получить обширную сравнительную базу с физическими и численными исследованиями, проведенными ранее, и, с другой стороны, чтобы иметь метод с областью применения, охватывающей 90% типов углеводородных резервуаров, которые находятся в стадии текущей или перспективной разработки.

Были изучены следующие классы образцов пористых сред:

1. синтетические образцы (изготовленные путем высокотемпературного спекания стеклянных шариков (дроби) радиусами 70–100 мкм, 300–400 мкм и 400–600 мкм, далее обозначаются как A1, A2 и т.д.);

2. карбонаты (далее обозначаются как C1, C2 и т.д.);

3. песчаники (далее обозначаются как S1, S2 и т.д.).

Исходные данные по образцам пористых сред были получены с помощью микрокомпьютерной томографии (микро-КТ) с разрешением 16,5 мкм/пиксель для синтетических образцов и 5 мкм/пиксель для карбонатов и песчаников. Затем исходные изображения были бинаризованы с помощью программного обеспечения ImageJ с использованием метода Оцу, в результате чего были получены бинарные кубические массивы размером 400×400×400 вокселей.

Изображения поперечных сечений бинаризованных образцов пористой среды разных классов, использованных в данной работе, представлены на рис. 1.

Синтетические керны были выбраны как простейший тип геологического образца с однородной и изотропной структурой, позволяющей проводить физические и численные исследования. Эти структуры часто используются исследователями во всем мире, чтобы иметь возможность проводить сравнительные исследования без необходимости транспортировки образцов из одного места в другое для проведения испытаний для межлабораторного сравнения. Хотя использование эталонных геологических объектов – Береа, Бентхаймер и т.д., ранее было преобладающим в практической области. Основные недостатки использования природных образцов, такие как изменчивость свойств и территориальная привязка, не позволяют достичь идентичности объектов исследования. Таким образом, синтетические керны были выбраны вместо «классических» эталонных объектов с целью легкой воспроизводимости и репликации результатов.

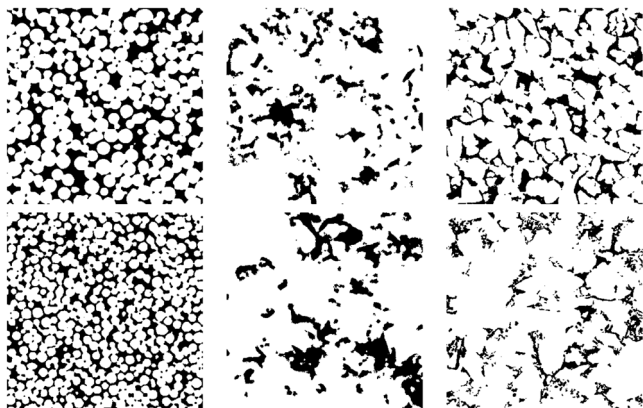


Рис. 1. Поперечные сечения различных типов образцов пористых сред (после бинаризации). В левом столбце приведены примеры сечений синтетических образцов, в центральном столбце приведены примеры сечений образцов карбоната, в правом – поперечных сечений образцов песчаника. Белый цвет соответствует твердой фазе, а черный цвет – порам.

Образцы карбонатов (геологический возраст D3FM, глубина 2800–3400 м) были отобраны из действующего газового месторождения, расположенного в Тимано-Печорском бассейне с запасами, относящимися к категории трудноизвлекаемых. В связи с этим, для данного пласта был выполнен обширный комплекс исследований, позволяющий провести надежный анализ различными методами. Карбонатные пласты, аналогичные рассматриваемому, содержат около 12% мировых запасов углеводородов и представляют собой наиболее распространенную в мире категорию карбонатных коллекторов.

Образцы терригенных пород или песчаников (геологический возраст Ach3, глубина 3100–3600 м) были отобраны из действующего газового месторождения в Западно-Сибирском бассейне. Это также сложный резервуар с неоднородной и анизотропной структурой. Мотивация для выбора песчаников в рамках данной работы аналогична выбору для карбонатов. По разным оценкам, песчаноподобные резервуары содержат около 30% мировых остаточных запасов углеводородов.

Набор образцов подобран таким образом, чтобы, с одной стороны, охватить наиболее простые и распространенные случаи, что позволит исследователям по всему миру самостоятельно опробовать метод и сравнить результаты, а с другой стороны, представить наиболее перспективные и практически значимые типы структур порового пространства с опытом успешной разработки месторождений углеводородов.

В табл. 1 представлены стандартные диапазоны значений проницаемости (полученные с помощью газового пермеаметра) для каждого класса образцов.

Функционалы Минковского и их вычисление на цифровых изображениях

Образец бинарной пористой среды состоит из двух взаимодополняющих частей (фаз): твердой (каменной) фазовой области, которая считается непроницаемой для жидкостей, и области порового (пустотного) пространства, по которой возможен перенос жидкости. Ввиду их взаимодополняемости, любая из этих двух частей

Класс образцов	Стандартный диапазон значений проницаемости, мД
Синтетические	100–1000
Карбонаты	10–100
Песчаники	0,01–10

Табл. 1. Стандартные диапазоны значений проницаемости (полученные с помощью газового пермеаметра) для синтетических образцов, карбонатов и песчаников

может быть использована для характеристики морфологии образца. В этой работе мы сосредоточимся на структуре порового пространства, поскольку оно служит непосредственно каналом для переноса жидкости.

Интегральная геометрия предоставляет набор полезных инструментов для описания сложной структуры порового пространства. Функционалы Минковского, введенные в интегральной геометрии, включают набор инвариантных мер, которые могут быть использованы для количественной оценки структурных свойств порового пространства (Matheron, 1974; Bonnesen et al., 1988; Serra, 1983; Michielsen, Raedt, 2001; Mecke, Arns, 2005; Mecke, 2000).

Рассмотрим тело X с гладкой границей ∂X , вложенное в d -мерное евклидово пространство R^d , соответствующее положению области поровой фазы в образце. Следовательно, для X существует $d + 1$ функционалов Минковского.

В данной работе рассматриваются плоские сечения порового пространства, поэтому мы будем рассматривать только 2-мерные функционалы Минковского. Пусть X – заданное плоское сечение порового пространства в образце. В 2-мерном пространстве R^2 существует 3 функционала Минковского $M_i(X)$, $i = 0, 1, 2$, которые пропорциональны таким основным геометрическим характеристикам, как площадь поверхности $S(X)$, периметр $P(X)$ и эйлерова характеристика $\chi(X)$, и определяются следующим образом:

$$M_0(X) = \int_X d\sigma, \quad (1)$$

$$M_1(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial X} dl, \quad (2)$$

$$M_2(X) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\partial X} \frac{1}{R} dl, \quad (3)$$

где $d\sigma$ и dl – элементы поверхности и окружности соответственно, R – радиус локальной кривизны. Это приводит к следующему определению площади поверхности $S(X) = M_0(X)$, периметра $P(X) = 2\pi M_1(X)$ и 2D эйлеровой характеристики $\chi(X) = \pi M_2(X)$.

Эйлерова характеристика рассматривается как интегральная оценка структурной сложности объекта и определяется как знакопеременная сумма топологических инвариантов, называемых числами Бетти (Arns et al., 2001). Для объекта X , вложенного в R^2 , существуют два числа Бетти – $b_0(X)$ и $b_1(X)$, а эйлерову характеристику можно записать следующим образом:

$$\chi(X) = b_0(X) - b_1(X). \quad (4)$$

В двумерном пространстве числа Бетти имеют наглядную интерпретацию. $b_0(X)$ – число отдельных частей

(связных компонент), из которых состоит объект. $b_1(X)$ соответствует числу сквозных туннелей в объекте.

Приведем основные свойства функционалов Минковского:

- Аддитивность. Обозначим через K класс выпуклых множеств в R^d . Предположим, что множество $X \in K$ разделено плоскостью на 2 подмножества X_1 и X_2 , которые также являются выпуклыми, так что $X = X_1 \cup X_2$ и $X_1, X_2 \in K$, тогда:

$$M_v(X_1 \cup X_2) = M_v(X_1) + M_v(X_2) - M_v(X_1 \cap X_2)$$

для $v = 0, 1, \dots, d$; (5)

- Инвариантность относительно движений (трансляций и поворотов). Пусть G – группа движений в R^d . Тогда действие элемента группы $g \in G$ на выпуклом множестве $X \in K$ записывается как gX . Тогда:

$$M_v(gX) = M_v(X) \text{ для } v = 0, 1, \dots, d; \quad (6)$$

- Непрерывность. Если имеет место сходимости последовательности выпуклых множеств (которая определяется на основе метрики Хаусдорфа для множеств), то есть $X_n \rightarrow X$ при $n \rightarrow \infty$ и $X_n, X \in K$, тогда:

$$M_v(X_n) \rightarrow M_v(X) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для } v = 0, 1, \dots, d; \quad (7)$$

Здесь мы упомянули только выпуклые множества, но эти свойства можно обобщить на класс L множеств, которые можно представить в виде конечного объединения выпуклых множеств, т. е. $X \in L$, если $X = \bigcup_{i=1}^N X_i$, $N < \infty$ и $X_i \in K$. В рамках данной работы мы предполагаем, что поровое пространство и все его двумерные плоские сечения удовлетворяют этому условию и принадлежат классу L .

С развитием вычислительной геометрии (Edelsbrunner, 2014; Michielsen, Raedt, 2001) в различных работах были представлены методы вычисления функционалов Минковского для бинарных изображений (Ohser, Mücklich, 2000; Mantz et al., 2008; Boelens, Tchelepi, 2021). В настоящей работе был использован подход, предложенный в (Legland et al., 2007; Legland, 2024).

В соответствии с этим подходом площадь поверхности объектов в двумерном пространстве вычисляется как количество пикселей в объекте. Эйлерова характеристика вычисляется на основе обобщенного определения, так называемого обобщения $Z\ddot{a}h\ddot{l}e$ для тел с негладкой границей. Мера периметра для двумерных объектов вычисляется на основе дискретизации формулы Крофтона. Для пикселей изображения применяется 4-связность.

Расчеты двумерных функционалов Минковского для поперечных сечений бинарных изображений пористой среды были выполнены с использованием MATLAB.

Описание и численная симуляция гидродинамики медленных течений флюидов в пористых средах

В настоящей статье рассматриваются только достаточно медленные однофазные потоки с числом Рейнольдса, близким к нулю. В этом случае уравнения Стокса и неразрывности используются для описания сохранения импульса и сохранения массы (Scheidegger, 1957):

$$-\mu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (9)$$

где \vec{u} – скорость потока жидкости, μ – динамическая вязкость жидкости, p – давление, \vec{f} – плотность силы, ρ – плотность флюида.

Численное моделирование потока флюида в образцах бинарных пористых сред выполнялось в модуле FlowDict программного обеспечения GeoDict с использованием параллельных вычислений (GeoDict simulation software, 2022; Wiegmann et al., 2010; Saxena et al., 2017; Mattila et al., 2016; Patankar, 1980; Versteeg, Malalasekera, 2007; Zeng, Grigg, 2006).

В качестве переносимого флюида был выбран газовый конденсат с динамическим параметром вязкости $\mu = 0,00107$ кг/(м·с). Моделирование проводилось в кубической области с границей, окружающей образец бинарной пористой среды. Для всех образцов был применен одинаковый градиент давления только по оси Z . Граничные условия задавались таким образом, что проницаемыми для жидкости были оставлены только 2 противоположные грани куба, ортогональные оси Z , т. е. подобно тому, как если бы образец находился в трубе квадратного сечения, стенки которой плотно прилегают к 4 граням образца.

В результате моделирования для каждого бинарного образца был получен массив средних значений компоненты вектора скорости v_z в каждом слое образца, ортогональном оси Z . Предполагался стационарный режим течения, т. е. без зависящих от времени параметров, в т. ч. без турбулентности.

Рис. 2–4 представляют собой изображения полей установившегося распределения значений поперечной скорости для различных образцов, изученных в рамках данной работы.

Корреляции динамических и геометрических характеристик

Перед построением моделей для характеристики скорости потока флюида необходимо в различных классах образцов пористых сред проанализировать связи между геометрическими характеристиками, вычисленными из бинаризованных томографических изображений, и средними значениями компоненты скорости потока, полученными из моделирования гидродинамики.

В этом разделе корреляции между средними значениями компоненты скорости потока в сечениях образца и 2D функционалами Минковского для соответствующих слоев порового пространства рассматриваются для случаев моделирования течения Стокса. Для обеспечения единообразия средние компоненты скорости и значения функционалов Минковского для всех образцов были нормированы на интервал от 0 до 1.

Для начала рассмотрим синтетические образцы. На рис. 5 представлены примеры диаграмм рассеяния, которые отображают связи между средней скоростью потока жидкости, полученной при моделировании уравнения Стокса для каждого сечения образца, с функционалами Минковского порового пространства в соответствующих сечениях в образце A3 (стеклянные шарики радиусами 70–100 мкм).

Отчетливо видно, что большие значения M_p , т. е. большая площадь поперечного сечения порового пространства соответствует меньшим скоростям потока жидкости v_z .

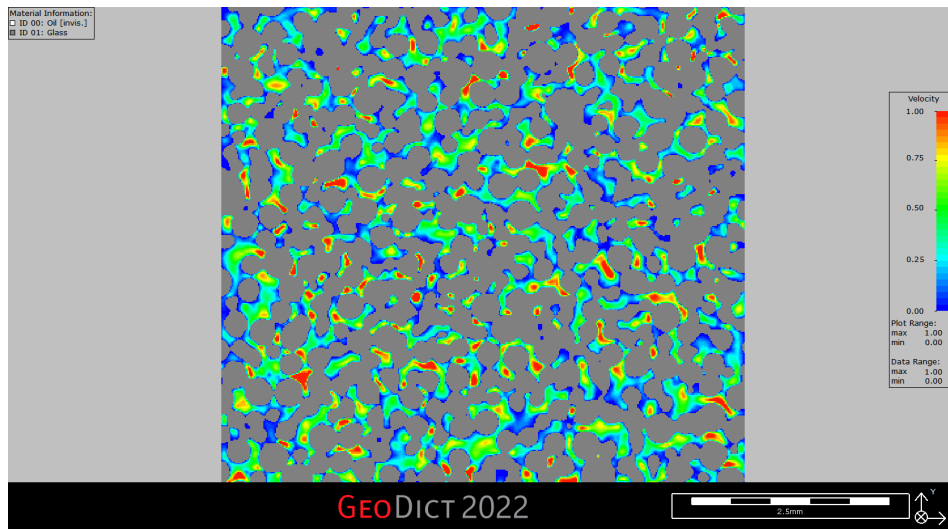


Рис. 2. Карта распределения значений поперечной скорости, масштабированных в интервале от 0 до 1 для устойчивого потока в синтетическом образце, полученная путем моделирования уравнения Стокса с использованием модуля FlowDict

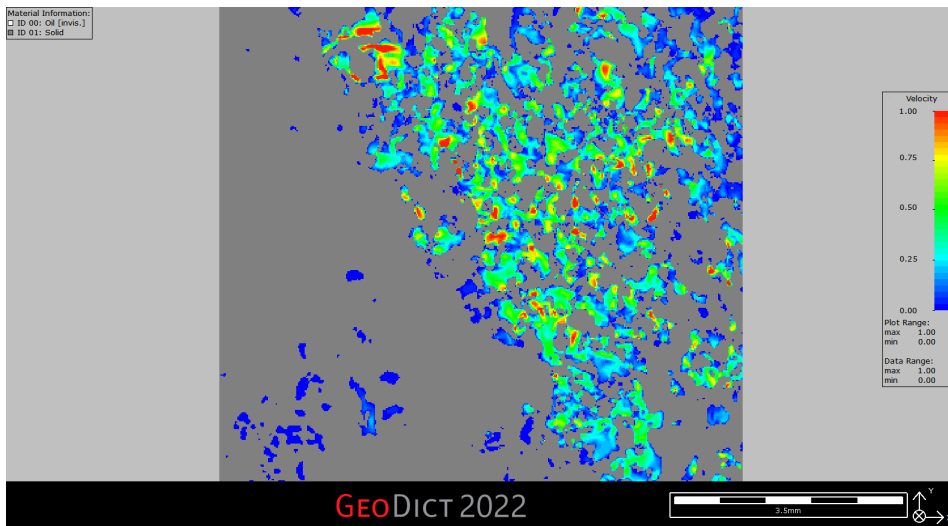


Рис. 3. Карта распределения значений поперечной скорости, масштабированных в интервале от 0 до 1 для устойчивого потока в образце карбоната, полученная путем моделирования уравнения Стокса с использованием модуля FlowDict

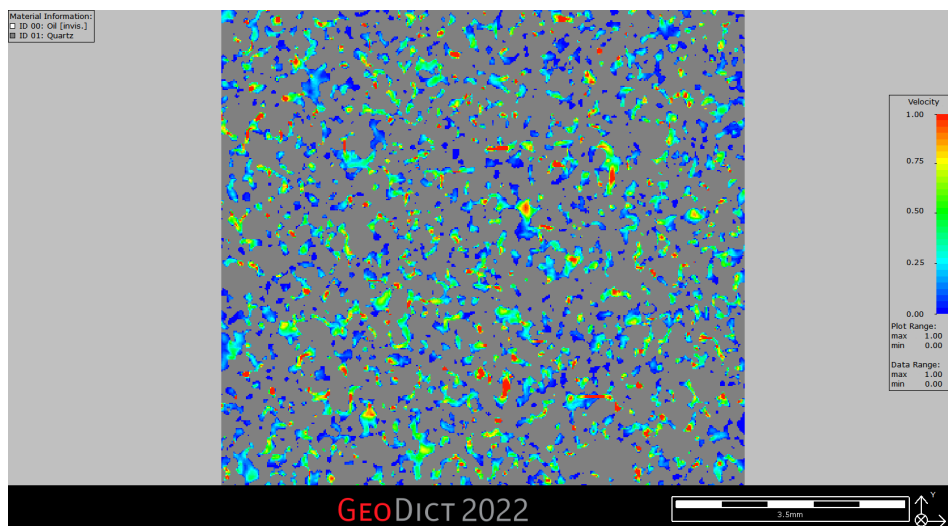


Рис. 4. Карта распределения значений поперечной скорости, масштабированных в интервале от 0 до 1 для устойчивого потока в образце песчаника, полученная путем моделирования уравнения Стокса с использованием модуля FlowDict

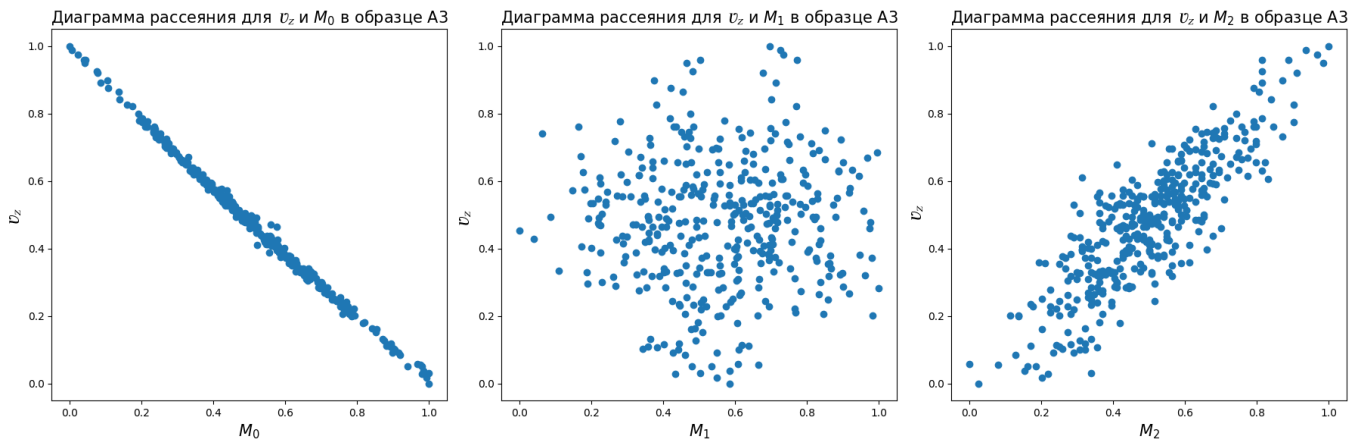


Рис. 5. Диаграммы рассеяния для средних значений компоненты скорости v_z , полученных с помощью моделирования уравнения Стокса, и 2D функционалов Минковского M_0 , M_1 , M_2 для образца А3 (синтетический образец, стеклянные шарики радиусами 70–100 мкм)

В бинарных пористых средах общая площадь поперечного сечения образца S является суммой площади порового пространства и площади породы, т. е. $S = S_{пор} + S_{породы}$, большая площадь твердой фазы приводит к меньшей площади порового пространства, что означает, что остается меньше места для переноса жидкости.

В случае синтетических образцов зависимость довольно близка к линейной. Цифры в табл. 2 также показывают высокие (по модулю) коэффициенты корреляции между средней компонентой скорости v_z и функционалом Минковского M_0 . Как видно из изображений поперечных сечений, представленных в левом столбце рис. 1, эти образцы представляют собой плотные упаковки стеклянных шариков. Такая пространственная конфигурация образует хорошо связанное поровое пространство, что позволяет осуществлять эффективную фильтрацию жидкости.

Образец	$corr(v_z, M_0)$	$corr(v_z, M_1)$	$corr(v_z, M_2)$
A1 (70–100 мкм)	–0,97	–0,15	0,70
A2 (300–400 мкм)	–0,99	0,23	0,86
A3 (400–600 мкм)	–0,99	–0,27	0,77

Табл. 2. Коэффициенты корреляции для средних значений компоненты скорости v_z и функционалов Минковского M_0 , M_1 , M_2 в синтетических образцах

Диаграммы рассеяния для средней скорости v_z и M_1 , которая пропорциональна общему периметру межфазной границы, не показывают никаких выраженных тенденций, что означает, что значения коэффициента корреляции близки к нулю, как можно видеть в табл. 2.

Что касается M_2 , пропорционального эйлеровой характеристике, которую в свою очередь можно рассматривать как «характеристику структурной сложности» поперечного сечения порового пространства, то соответствующие диаграммы рассеяния представляют собой слегка вытянутые облака точек с восходящим трендом, что хорошо согласуется с положительными коэффициентами корреляции в табл. 2.

Теперь рассмотрим образцы карбонатов, соответствующие примеры диаграмм рассеяния представлены на рис. 6.

В случае образцов карбоната нисходящий тренд отчетливо прослеживается на диаграммах рассеяния для v_z и M_0 , что также подтверждается большими по модулю отрицательными соответствующими коэффициентами корреляции для v_z и M_0 , наблюдаемыми в табл. 3.

Диаграммы рассеяния для v_z и M_1 показывают, что больший периметр порового пространства в основном соответствует меньшим средним скоростям для заданного поперечного сечения образца. Такой вид зависимости

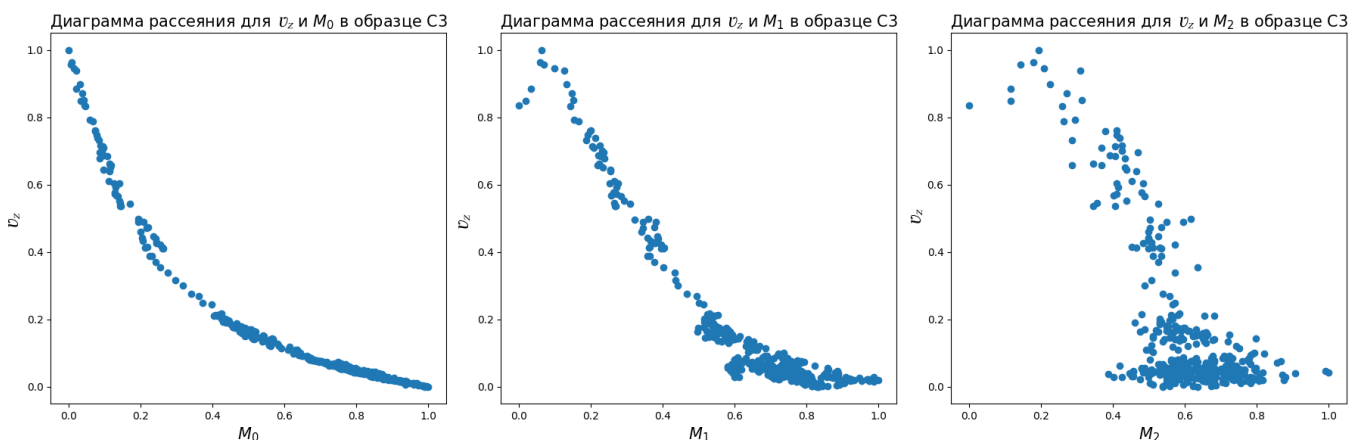


Рис. 6. Диаграммы рассеяния для средних значений компоненты скорости v_z , полученных с помощью моделирования уравнения Стокса, и 2D функционалов Минковского M_0 , M_1 , M_2 для образца С3 (карбонат)

Образец	$corr(v_z, M_0)$	$corr(v_z, M_1)$	$corr(v_z, M_2)$
C1	-0,89	-0,91	-0,50
C2	-0,94	-0,88	-0,58
C3	-0,93	-0,91	-0,53

Табл. 3. Коэффициенты корреляции для средних значений компоненты скорости v_z и функционалов Минковского M_0, M_1, M_2 в образцах карбоната

может быть объяснен с учетом соображения, следующего из уравнения Хагена–Пуазейля. В случае вязких жидкостей потоки, прилегающие к границе порового пространства, имеют более низкие скорости, чем те, которые удалены от границы (рис. 2–4). Это создает низкоскоростные слои, соседствующие с межфазной границей, что приводит к более низкой средней скорости для больших периметров границ.

Что касается диаграмм рассеяния для v_z и M_2 , то из них видно, что более высокая средняя скорость соответствует меньшей эйлеровой характеристике, образуя слегка нисходящий тренд. Это также показано в табл. 3, где наблюдаются умеренные отрицательные коэффициенты корреляции для v_z и M_2 .

Перейдем к рассмотрению образцов песчаника. Соответствующие примеры диаграмм рассеяния представлены на рис. 7.

Для образцов песчаника можно снова наблюдать достаточно выраженный нисходящий тренд на диаграммах рассеяния для v_z и M_0 , что также подтверждается большими по модулю отрицательными коэффициентами корреляции в табл. 4, как и для двух других рассматриваемых классов образцов.

Что касается диаграмм рассеяния для v_z и M_1 , они демонстрируют очень слабо выраженный нисходящий тренд. Это также можно увидеть в табл. 4, показывающей довольно малые по модулю отрицательные показатели корреляции для v_z и M_1 .

Диаграммы рассеяния для v_z и M_2 в целом не показывают никаких выраженных тенденций для песчаника, что приводит к довольно малым по модулю коэффициентам корреляции, как положительным, так и отрицательным (табл. 4).

Образец	$corr(v_z, M_0)$	$corr(v_z, M_1)$	$corr(v_z, M_2)$
S1	-0,98	-0,55	0,59
S2	-0,91	-0,83	-0,50
S3	-0,99	-0,62	0,49

Табл. 4. Коэффициенты корреляции для средних значений компоненты скорости v_z и функционалов Минковского M_0, M_1, M_2 в образцах песчаника

По результатам первичного корреляционного анализа можно сделать вывод о существовании некоторых устойчивых связей между динамическими свойствами потока жидкости через пористую среду и геометрическими свойствами этой среды. Это формирует основу для разработки прогностических моделей, описывающих динамику скорости потока жидкости на основе геометрии соответствующего порового пространства.

Регрессионные модели для средней скорости потока жидкости

Что касается результатов корреляционного анализа и в особенности высоких значений коэффициентов корреляции для v_z и M_0 для большинства рассмотренных образцов, можно предположить наличие связи между v_z и функционалами Минковского, которую можно представить в виде многомерной линейной регрессионной модели (Montgomery et al., 2021). Как говорилось ранее, образцы имеют кубическую форму. Обозначим за l длину стороны куба (образца). Пусть также $X(z)$ – плоское сечение на уровне $z \in [0, l]$. Тогда, для фиксированного образца, функционалы Минковского $M_i(X(z))$ для слоев $X(z)$ порового пространства образца на уровне z можно записать как функцию координаты z , т.е. $M_i(z) = M_i(X(z))$. Тогда линейная регрессионная модель:

$$v_z(z) = c_0 M_0(z) + c_1 M_1(z) + c_2 M_2(z) + b, \quad 10$$

где $M_i(z) = M_i(X(z))$, $i = 0, 1, 2$ – значения функционалов Минковского для слоев порового пространства $X(z)$ на уровне z , а коэффициенты c_i для $i = 0, 1, 2$ и b – действительные коэффициенты (константы). В данной работе регрессионный анализ выполняется с использованием

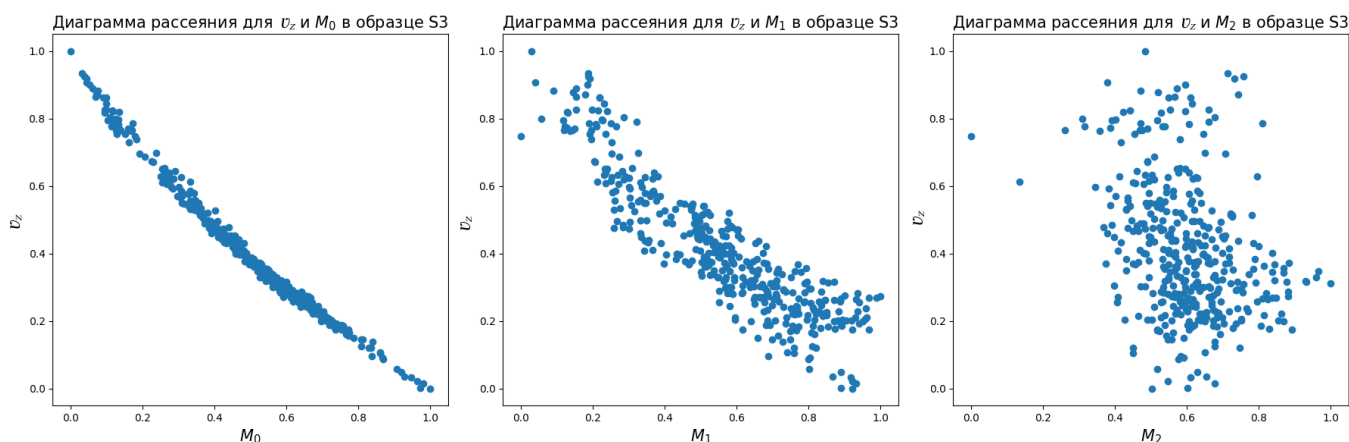


Рис. 7. Диаграммы рассеяния для средних значений компоненты скорости v_z , полученных с помощью моделирования уравнения Стокса, и 2D функционалов Минковского M_0, M_1, M_2 для образца S3 (песчаник)

Python (Pedregosa et al., 2011; Buitinck et al., 2013; Seabold, Perktold, 2010).

В рамках работы мы предполагаем, что для произвольного класса L образцов пористых сред существует модель (т.е. набор действительных коэффициентов c_0 , c_1 , c_2 и b), которая способна предсказывать тренды для масштабированных на отрезок $[0,1]$ значений компоненты средней скорости потока флюида v_z на основе линейной комбинации значений масштабированных на отрезок $[0,1]$ 2D функционалов Минковского M_0 , M_1 , M_2 в каждом слое образца с определенной степенью точности. Пусть $X(z)$ – произвольное плоское сечение на уровне z порового пространства произвольного образца пористой среды из класса L . Учитывая вышеизложенные соображения, общая формула для регрессионной модели записывается следующим образом:

$$v_z(z) = c_0^L M_0(z) + c_1^L M_1(z) + c_2^L M_2(z) + b^L, \quad (11)$$

где c_0^L , c_1^L , c_2^L и b^L – коэффициенты модели, построенной для образца класса L , которую можно использовать для предсказания значений на других образцах из класса L .

В этом разделе для каждого рассматриваемого в работе класса пористых сред строится регрессионная модель со значениями v_z , полученными из моделирования Стокса.

Как и в предыдущем разделе, начнем с синтетических образцов. Табл. 5 показывает свойства построенной линейной регрессионной модели, такие как значения коэффициентов, соответствующие им стандартные ошибки и уровень статистической значимости, а также значение коэффициента детерминации R^2 для всей модели. Образец

A1 был выбран в качестве образца для построения модели для класса синтетических образцов.

Как видно из табл. 5, коэффициенты данной модели, за исключением c_2 , имеют высокий уровень статистической значимости, а высокое значение коэффициента детерминации R^2 показывает предсказательную силу модели.

На рис. 8 прогнозные значения средней скорости потока жидкости по слоям v_z , определенные с применением регрессионной модели из табл. 5, сопоставляются с v_z , полученными непосредственно из численного моделирования уравнения Стокса. Видно, что предсказательная способность построенной регрессионной модели достаточно высока для рассмотренных синтетических образцов, с наблюдаемой относительной ошибкой на уровне 1–4%.

Далее рассмотрим образцы карбонатов, для которых параметры соответствующей регрессионной модели указаны в табл. 6. В качестве обучающего в классе карбонатов был выбран образец C1.

Образец	c_0	c_1	c_2	b
Значение	-1,014	-0,052	0,003	1,017
Стандартная ошибка	0,018	0,013	0,020	0,020
Уровень значимости (P-значение)	0,000	0,000	0,895	0,000
R^2	0,946			

Табл. 5. Параметры регрессионной модели для класса синтетических образцов, построенной на образце A1

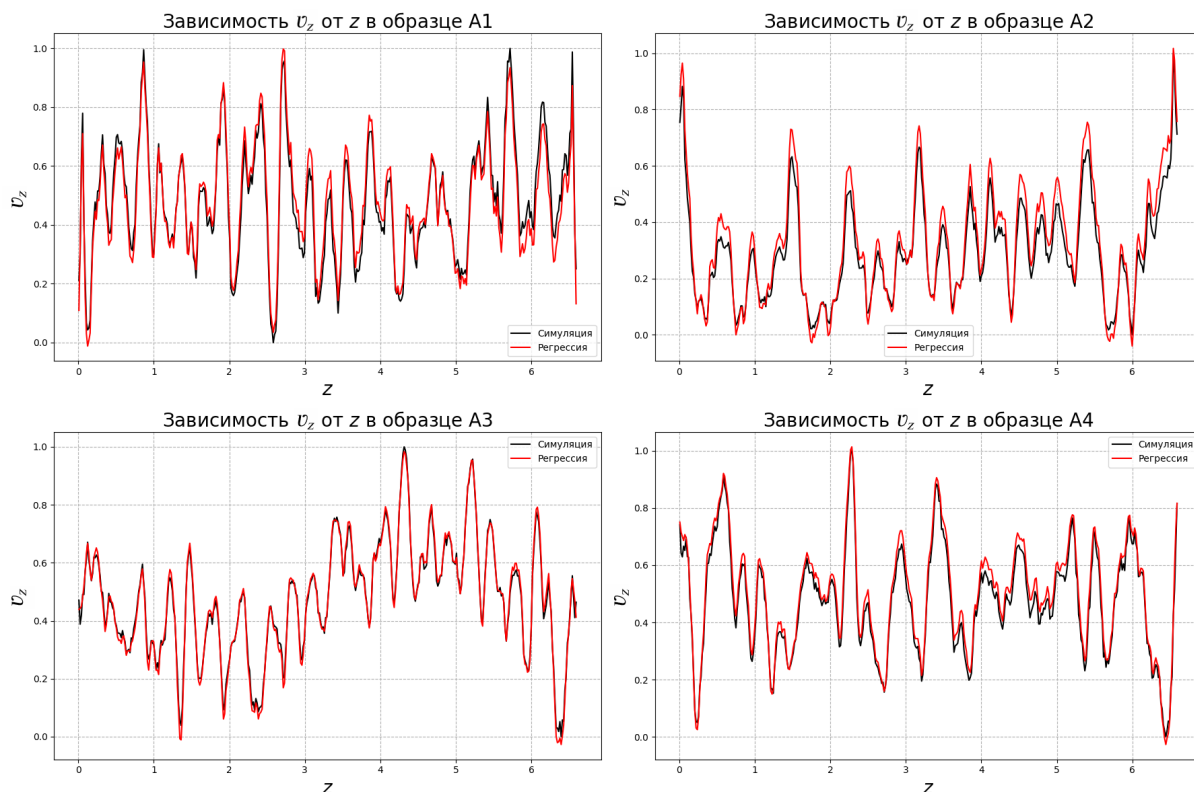


Рис. 8. Сопоставление зависимостей средних значений компоненты скорости потока флюида v_z в каждом слое от координаты слоя для синтетических образцов. Красным цветом выделена зависимость, соответствующая значениям v_z , полученным из расчета из нормированных на отрезок $[0,1]$ функционалов Минковского по построенной для класса образцов карбоната регрессионной модели. Зависимость для нормированных значений v_z , полученных из численной симуляции уравнения Стокса, показана черным цветом.

Образец	c_0	c_1	c_2	b
Значение	-0,291	-0,407	-0,069	0,660
Стандартная ошибка	0,052	0,062	0,036	0,011
Уровень значимости (P-значение)	0,000	0,000	0,053	0,000
R^2	0,861			

Табл. 6. Параметры регрессионной модели для карбонатов, построенной на образце С1

Образец	c_0	c_1	c_2	b
Значение	-1,064	0,073	0,010	0,929
Стандартная ошибка	0,015	0,013	0,017	0,014
Уровень значимости (P-значение)	0,000	0,000	0,562	0,000
R^2	0,962			

Табл. 7. Параметры регрессионной модели для песчаников, построенной на образце S1

Из табл. 6, как и в случае синтетических образцов, можно сделать вывод, что модель, построенная для образцов карбоната, имеет в большинстве статистически значимые коэффициенты и достаточно высокое значение R^2 .

На рис. 9 сопоставлены прогнозные значения v_z из модели в табл. 6 и значения из численного моделирования Стокса для различных образцов карбоната. Средняя скорость потока жидкости по слоям довольно точно описывается построенной линейной моделью с относительной ошибкой на уровне 5–6%.

Рассмотрим образцы песчаника, для которых свойства соответствующей модели приведены в табл. 7. Образец S1 был выбран в качестве обучающего образца для песчаников.

Из данных в табл. 7 можно сделать вывод о том, что модель, построенная для образцов песчаника, как и для рассмотренных классов образцов, имеет в основном статистически значимые коэффициенты, за исключением c_2 , и довольно высокое значение R^2 .

На рис. 10 сопоставляются значения средней скорости потока жидкости по слоям, вычисленной с помощью модели из табл. 7, с v_z , полученной из численного моделирования уравнения Стокса. Средняя скорость потока жидкости по слоям довольно точно описывается построенной линейной моделью с относительной ошибкой на уровне 2–7%.

Обсуждение результатов

Установленные в ходе корреляционного анализа соотношения между средними компонентами поперечной скорости v_z и геометрическими мерами порового пространства в этих сечениях заложили основу для разработки концепции построения линейных моделей для характеристики средней скорости потока жидкости по слоям через геометрические меры поровой (или горной) фазы.

Линейные геометрические характеристические модели, построенные по различным классам образцов

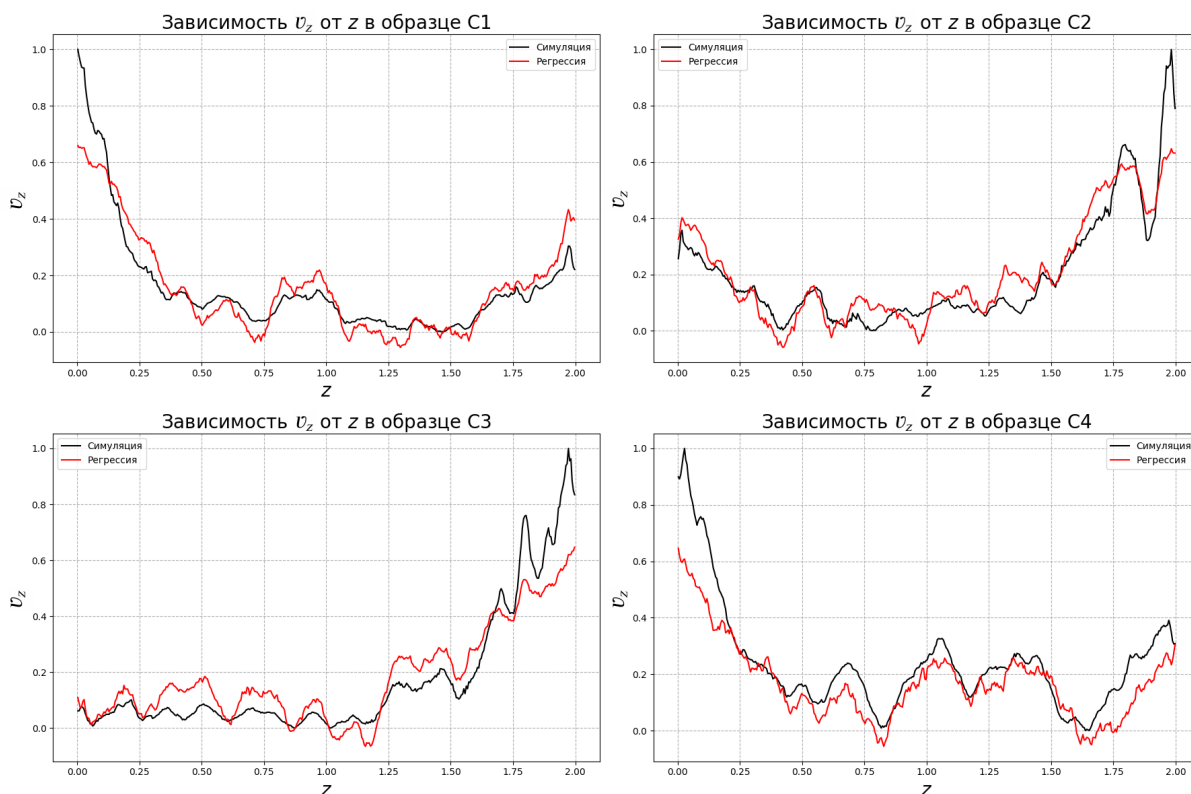


Рис. 9. Сопоставление зависимостей средних значений компоненты скорости потока флюида v_z в каждом слое от координаты слоя для образцов карбонатов. Красным цветом выделена зависимость, соответствующая значениям v_z , полученным из расчета из нормированных на отрезок [0,1] функционалов Минковского по построенной для класса синтетических образцов регрессионной модели. Зависимость для нормированных значений v_z , полученных из численной симуляции уравнения Стокса, показана черным цветом.

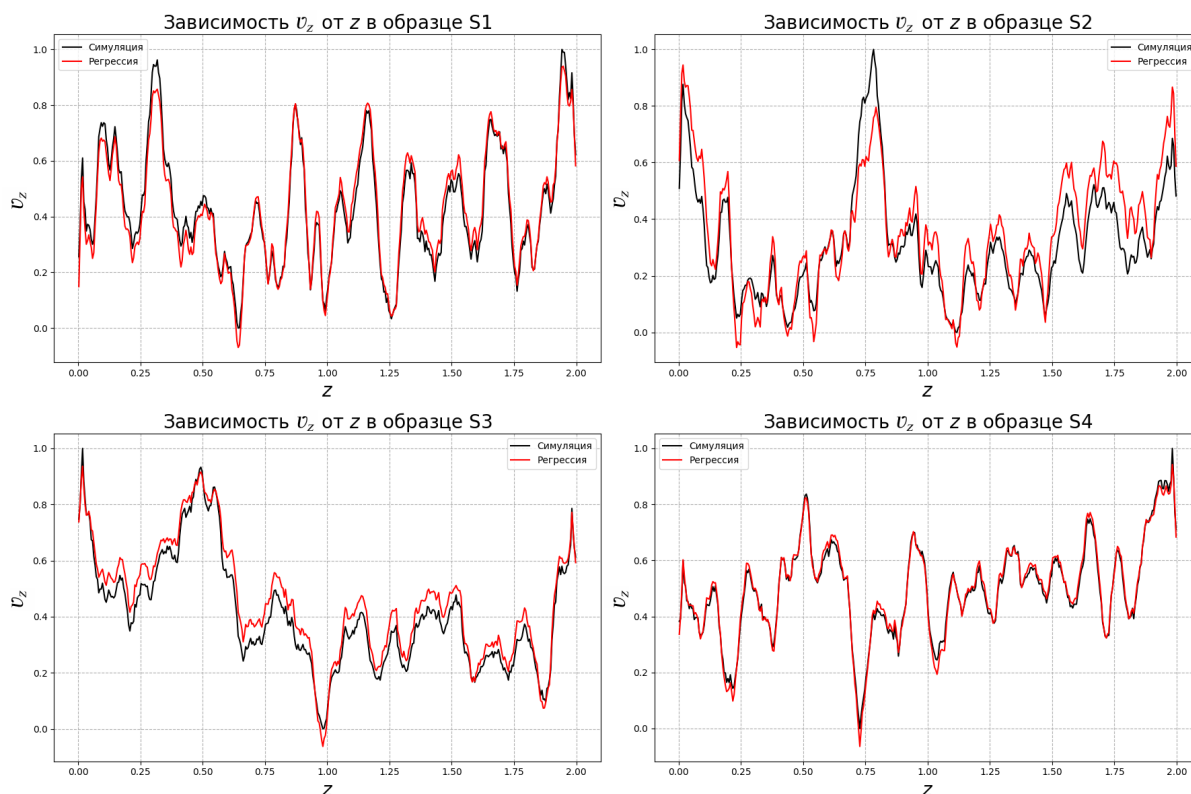


Рис. 10. Сопоставление зависимостей средних значений компоненты скорости потока флюида v_z в каждом слое от координаты слоя для образцов песчаников. Красным цветом выделена зависимость, соответствующая значениям v_z , полученным из расчета из нормированных на отрезок $[0,1]$ функционалов Минковского по построенной для класса образцов песчаника регрессионной модели. Зависимость для нормированных значений v_z , полученных из численной симуляции уравнения Стокса, показана черным цветом.

на основе результатов моделирования Стокса, обладают относительно высокой степенью статистической значимости и способны описывать зависимости средней по слою скорости потока со средней относительной ошибкой менее 7% для рассматриваемых классов образцов пористых сред. Это показывает надежность и применимость подхода, основанного на интегральной геометрии, для характеристики средней скорости потока жидкости по слоям для однофазного потока жидкости в пористых средах, в первую очередь в случае относительно низких скоростей жидкости, когда можно пренебречь нелинейными динамическими эффектами, такими как турбулентность.

Данный подход позволит получить модели характеристик скорости потока однофазной жидкости во всех основных классах пористых сред (петротипах), которые в дальнейшем можно будет использовать для быстрой оценки потока посредством расчета геометрических характеристик для бинарных изображений образцов. Это снижает необходимость в дорогостоящих полномасштабных экспериментах по фильтрации или длительном численном моделировании.

Для рассмотрения в данной работе был выбран фиксированный тип флюида, т.е. газовый конденсат. В связи с этим, коэффициенты, полученные при построении линейных моделей в рамках заданного петротипа, также включают в себя некоторую негеометрическую информацию, такую как свойства флюида, поверхность порового пространства и их взаимодействие, которые влияют на процесс течения. Это позволяет объединять петротипы без прямого учета всех этих свойств, используя

только коэффициенты из линейной регрессионной модели, что позволяет осуществлять быстрый скрининг образцов, анализ чувствительности, а также решение обратных задач.

Учитывая полученные результаты, можно выделить следующие ограничения методологии.

- Текущий процесс построения модели требует высокого разрешения изображений порового пространства, позволяющего извлечь информацию о внутренней геометрической структуре образца со значительной степенью детализации.

- Предлагаемый метод построения регрессионной модели основан только на одном образце, выбранном из заданного петротипа, без учета того, является ли данный образец достаточно репрезентативным в пределах этого петротипа.

- Данный подход не рассматривает случаи нелинейных потоков, т.е. когда имеется влияние инерции и других нелинейных эффектов.

- Рассматриваемые линейные модели используют только двумерные геометрические характеристики, полученные для плоских слоев образцов пористой среды, не учитывая при этом трехмерную геометрию или межслоевые связи.

Таким образом, показана практическая применимость предлагаемого алгоритма и его сопоставимость с традиционными методами оценки транспортных свойств геологических сред, таких как резервуары нефти и газа. Более того, учитывая, что набор исследованных образцов охватывает большую часть практически значимых типов

геологических объектов, можно предположить, что применимость метода не ограничивается такими параметрами, как литологический тип (карбонат, песчаник), геологическое строение, пористость, проницаемость, микротекстуры и фациальные особенности. Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что предлагаемый метод учитывает весь спектр морфологических особенностей, элементный и минеральный состав, вторичные геологические процессы и возможные микроструктурные трансформации, вызывающие изменения петрофизических параметров, тем самым устраняя необходимость явно описывать эти параметры в модели. Это упрощает обработку и организацию данных и, следовательно, позволяет делать быстрые оценки без привлечения какой-либо глубокой и ресурсоемкой инженерии.

Выводы

В настоящей статье предлагается новый метод характеристики однофазного потока жидкости через пористую среду. Метод основан на многомерной линейной регрессии, используемой для представления средней скорости потока жидкости по слоям как линейной функции двумерных геометрических характеристик поперечных сечений порового пространства образца.

1. Показана применимость данного метода для оценки средней скорости однофазного потока флюида в пористой среде для различных типов образцов, модели имеют высокую степень статистической значимости. Описана общая процедура исследования.

2. Приведено количественное описание связи значений средней скорости флюида, протекающего в пористой среде, со значениями двумерных функционалов Минковского срезов порового пространства.

3. Приведено описание общего процесса построения в рамках произвольно заданного класса образцов (петротипа) модели для оценки распределения значений средней скорости потока флюида на основе значений двумерных функционалов Минковского.

4. Для произвольного класса образцов (петротипа) существует статистически значимая линейная модель, позволяющая характеризовать среднюю по слою скорость однофазного потока флюида исключительно через двумерную геометрию пористой среды.

5. Предсказательная сила моделей, построенных в рамках рассмотренных петротипов, достаточно высока, относительная погрешность не превышает 15%.

6. Разработанный метод представляет собой стабильный и надежный инструмент для быстрой оценки средней скорости потока по слоям до применения каких-либо ресурсоемких традиционных методов оценки потока, что позволяет проводить быструю проверку даже в случае низкого качества входных данных.

7. В контексте перспектив развития отрасли данный подход открывает возможности для оптимизации петрофизической типизации и масштабирования фильтрационных свойств горных пород. Интеграция данных о геометрии порового пространства в расчетные модели позволит прогнозировать фильтрационные свойства на различных масштабах, минимизируя необходимость в дорогостоящих лабораторных тестах и ресурсоемком прямом численном моделировании.

Финансирование/Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению №075-10-2022-011.

Авторы выражают благодарность рецензентам за ценные замечания и предложения, которые способствовали улучшению работы.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- Adler P. (1992). Porous Media: Geometry and Transports; Butterworth-Heinemann series in chemical engineering, Elsevier Science.
- Ahmed T. (2010). Gas Reservoirs. *Reservoir Engineering Handbook*, pp. 855–908. <https://doi.org/10.1016/B978-1-85617-803-7.50021-3>
- Armstrong R.T., McClure J.E., Robins V., Liu, Z., Arns C.H., Schlüter S. & Berg S. (2019). Porous Media Characterization Using Minkowski Functionals: Theories, Applications and Future Directions. *Transport in Porous Media*, 130(1), pp. 305–335. <https://doi.org/10.1007/s11242-018-1201-4>
- Arns C., Knackstedt M. & Mecke K. (2010). 3D structural analysis: sensitivity of Minkowski functionals. *Journal of Microscopy*, 240(3), pp. 181–196. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2818.2010.03395.x>
- Arns C., Knackstedt M., Limaye A., Sakellariou A., Senden T., Sheppard A., Sok R., Pinczewski W. & Bunn G. (2004). Digital Core Laboratory: Properties of Reservoir Core Derived from 3D Images. *Proceedings of SPE Asia Pacific Conference on Integrated Modelling for Asset Management*. <https://doi.org/10.2523/87009-ms>
- Arns C.H., Knackstedt M.A., Pinczewski W.V. & Mecke K.R. (2001). Euler-Poincaré characteristics of classes of disordered media. *Physical Review E*, 63(3). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.031112>
- Bear J. (1975). Dynamics of Fluids in Porous Media. *Soil Science*, 120(2), pp. 162–163. <https://doi.org/10.1097/00010694-197508000-00022>
- Blunt M.J. (2016). Multiphase Flow in Permeable Media. <https://doi.org/10.1017/9781316145098>
- Blunt M.J. (2017). The Imperial College Lectures in Petroleum Engineering. <https://doi.org/10.1142/q0062>
- Blunt M.J., Akai T. & Bijeljic B. (2020). Evaluation of methods using topology and integral geometry to assess wettability. *Journal of Colloid and Interface Science*, 576, pp. 99–108. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2020.04.118>
- Boelens A.M., Tchelepi H.A. (2021). QuantImPy: Minkowski functionals and functions with Python. *SoftwareX*, 16, 100823. <https://doi.org/10.1016/j.softx.2021.100823>
- Bonnesen T., Fenchel W. (1934). Theorie der Konvexen Körper. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-47404-0>
- Cnudde V., Boone M. (2013). High-resolution X-ray computed tomography in geosciences: A review of the current technology and applications. *Earth-Science Reviews*, 123, pp. 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2013.04.003>
- Edelsbrunner H. (2014). A Short Course in Computational Geometry and Topology. *SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology*. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-05957-0>
- Ferréol B., Rothman D.H. (1995). Lattice-Boltzmann simulations of flow through Fontainebleau sandstone. *Transport in Porous Media*, 20(1-2), pp. 3–20. <https://doi.org/10.1007/BF00616923>
- GeoDict simulation software Release 2022. Math2Market GmbH, Germany. <https://doi.org/10.30423/release.geodict2022>
- Haque R.A., Mitra A.J. & Dutta T. (2024). Fluid flow in three-dimensional porous systems shows power law scaling with Minkowski functionals. *Physics of Fluids*, 36(11). <https://doi.org/10.1063/5.0238751>
- Hounsfield G.N. (1973). Computerized transverse axial scanning (tomography): Part 1. Description of system. *The British Journal of Radiology*, 46(552), pp. 1016–1022. <https://doi.org/10.1259/0007-1285-46-552-1016>
- Ivonin D., Kalnin T., Grachev E. & Shein E. (2020). Quantitative Analysis of Pore Space Structure in Dry and Wet Soil by Integral Geometry Methods. *Geosciences*, 10(9), 365. <https://doi.org/10.3390/geosciences10090365>
- Ivonin D.A., Grishin P.A. & Grachev E.A. (2021). Quantitative Analysis of Samples of Natural Hydrocarbon Reservoirs by the Methods of Integral Geometry and Topology. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 57(3), pp. 366–374. <https://doi.org/10.1134/S106935132103006X>
- Kalnin T.G., Ivonin D.A., Abrosimov K.N., Grachev E.A. & Sorokina N.V. (2021). Analysis of Tomographic Images of the Soil Pore Space Structure by Integral Geometry Methods. *Eurasian Soil Science*, 54(9), pp. 1400–1409. <https://doi.org/10.1134/S1064229321090039>

- Legland D. (2024). MatImage. GitHub. <https://github.com/mattools/matImage/releases/tag/v1.2.4>
- Legland D., Kiéu K. & Devaux M. (2011). Computation of Minkowski Measures on 2D and 3D Binary Images. *Image Analysis & Stereology*, 26(2), 83. <https://doi.org/10.5566/ias.v26.p83-92>
- Liu Z., Herring A., Arns C., Berg S. & Armstrong R.T. (2017). Pore-Scale Characterization of Two-Phase Flow Using Integral Geometry. *Transport in Porous Media*, 118(1), pp. 99–117. <https://doi.org/10.1007/s11242-017-0849-5>
- Mantz H., Jacobs K. & Mecke K. (2008). Utilizing Minkowski functionals for image analysis: a marching square algorithm. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008(12), P12015. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/12/P12015>
- Matheron G. (1976). Random Sets and Integral Geometry. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 139(2), 277. <https://doi.org/10.2307/2345196>
- Mattila K., Puurtinen T., Hyväluoma J., Surmas R., Mylly M., Turpeinen T., Robertsén F., Westerholm J. & Timonen J. (2016). A prospect for computing in porous materials research: Very large fluid flow simulations. *Journal of Computational Science*, 12, pp. 62–76. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2015.11.013>
- Mcclure J.E., Armstrong R.T., Berrill M.A., Schlüter S., Berg S., Gray W.G. & Miller C.T. (2018). Geometric state function for two-fluid flow in porous media. *Physical Review Fluids*, 3(8). <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.084306>
- Mecke K.R. (2000). Additivity, Convexity, and Beyond: Applications of Minkowski Functionals in Statistical Physics. *Lecture Notes in Physics*, pp. 111–184. https://doi.org/10.1007/3-540-45043-2_6
- Mecke K., Arns C.H. (2005). Fluids in porous media: a morphometric approach. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 17(9), S503–S534. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/17/9/014>
- Michielsen K., De raedt H. (2001). Integral-geometry morphological image analysis. *Physics Reports*, 347(6), pp. 461–538. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00106-X](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00106-X)
- Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. (2021). Introduction to Linear Regression Analysis; Wiley.
- Ohser J., Mücklich F. (2001). Statistical Analysis of Microstructures in Materials Science. *Practical Metallography*, 38(9), pp. 538–539. <https://doi.org/10.1515/pm-2001-380907>
- Otsu N. (1979). A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 9(1), pp. 62–66. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1979.4310076>
- Patankar S. (1980). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow; Electro Skills Series, Hemisphere Publishing Corporation.
- Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., Michel V., Thirion B., Grisel O., Blondel M., Prettenhofer P., Weiss R.; Dubourg V., et al. (2011). Scikit-learn: Machine Learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12, pp. 2825–2830.
- Satter A., Iqbal G.M. (2015). Reservoir Engineering: The Fundamentals, Simulation, and Management of Conventional and Unconventional Recoveries. pp. 1–472. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-800219-3.00001-2>
- Saxena N., Hofmann R., Alpak F.O., Berg S., Dietderich J., Agarwal U., Tandon K., Hunter S., Freeman J., Wilson O.B. (2017). References and benchmarks for pore-scale flow simulated using micro-CT images of porous media and digital rocks. *Advances in Water Resources*, 109, pp. 211–235. doi:<https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2017.09.007>
- Scheidegger A.E. (1957). The Physics of Flow Through Porous Media (3rd Edition). University of Toronto Press. doi: 10.3138/9781487583750
- Schoen J. (2015). Physical Properties of Rocks - Fundamentals and Principles of Petrophysics. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100404-3.00009-3>
- Scholz C., Wimer F., Götz J., Rude U., Schröder-Turk G., Mecke K., Bechinger C. (2012). Permeability of Porous Materials Determined from the Euler Characteristic. *Physical review letters*, 109, 264504. doi: 10.1103/PhysRevLett.109.264504
- Scholz C., Wimer F., Klatt M.A., Hirneise D., Schröder-Turk G.E., Mecke K., Bechinger C. (2015). Direct relations between morphology and transport in Boolean models. *Phys. Rev. E*, 92, 43023. doi: 10.1103/PhysRevE.92.043023
- Seabold S., Perktold J. (2010). Statsmodels: Econometric and Statistical Modeling with Python. SciPy 2010, <https://doi.org/10.25080/Majora-92bf1922-011>
- Serra J.P.F. (1983). Image Analysis and Mathematical Morphology.
- Sezgin M., Sankur B. (2004). Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation. *Journal of Electronic Imaging*, 13(1). <https://doi.org/10.1117/1.1631315>
- Sheppard A.P., Sok R.M. & Averdunk H. (2004). Techniques for image enhancement and segmentation of tomographic images of porous materials. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 339(1-2), pp. 145–151. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.03.057>
- Sibiriyakov B., Leite L. & Sibiriyakov E. (2021). Porosity, specific surface area and permeability in porous media. *Journal of Applied Geophysics*, 186, 104261. <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2021.104261>
- Slotte P.A., Berg C.F. & Khanamiri H.H. (2020). Predicting Resistivity and Permeability of Porous Media Using Minkowski Functionals. *Transport in Porous Media*, 131(2), pp. 705–722. <https://doi.org/10.1007/s11242-019-01363-2>
- Tiab D., Donaldson E.C. (2011). Petrophysics: Theory and Practice of Measuring Reservoir Rock and Fluid Transport Properties. Elsevier Science.
- Varoquaux G., Buitinck L., Louppe G., Grisel O., Pedregosa F. & Mueller A. (2015). Scikit-learn. *GetMobile: Mobile Computing and Communications*, 19(1), pp. 29–33. <https://doi.org/10.1145/2786984.2786995>
- Versteeg H., Malalasekera W. (2007). An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method; Pearson Education Limited.
- Wang D., Song Y., Wang P., Li G., Niu W., Shi Y. & Zhao L. (2022). Study on Oil Recovery Mechanism of Polymer-Surfactant Flooding Using X-ray Microtomography and Integral Geometry. *Molecules*, 27(23), 8621. <https://doi.org/10.3390/molecules27238621>
- Wiegmann A., Iliev O., Schindelin A. (2010). Computer aided engineering of filter materials and pleated filters.
- Xiong Y., Long X., Huang G. & Furman A. (2019). Impact of pore structure and morphology on flow and transport characteristics in randomly repacked grains with different angularities. *Soils and Foundations*, 59(6), pp. 1992–2006. <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2019.10.002>
- Zeng Z., Grigg R. (2006). A Criterion for Non-Darcy Flow in Porous Media. *Transport in Porous Media*, 63(1), pp. 57–69. <https://doi.org/10.1007/s11242-005-2720-3>

Сведения об авторах

Михаил Валерьевич Чернявский – аспирант, кафедра математического моделирования и информатики, физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Россия, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

e-mail: chernjavskiy.mv15@physics.msu.ru

Василий Витальевич Тимошенко – аспирант, кафедра физико-математических методов управления, физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Россия, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

e-mail: timoshenko.vv19@physics.msu.ru

Андрей Игоревич Морковкин – инженер, Центр науки и технологий добычи углеводородов, Сколковский институт науки и технологий

Россия, 121205, Москва, территория Инновационного Центра «Сколково», Большой бульвар, д. 30, стр.1

e-mail: a.morkovkin@skoltech.ru

Павел Андреевич Гришин – заместитель директора Центра науки и технологий добычи углеводородов, Сколковский институт науки и технологий

Россия, 121205, Москва, территория Инновационного Центра «Сколково», Большой бульвар, д. 30, стр.1

e-mail: p.grishin@skoltech.ru

Андрей Борисович Федотов – аспирант, кафедра математического моделирования и информатики, физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Россия, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
e-mail: ab.fedotov@physics.msu.ru

Евгений Александрович Грачев – кандидат тех. наук, доцент, кафедра математического моделирования и информатики, физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Россия, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
e-mail: grachevea@gmail.com

Статья поступила в редакцию 18.05.2025;
Принята к публикации 11.08.2025; Опубликована 30.03.2026

IN ENGLISH

ORIGINAL ARTICLE

Mean Velocity Calculation for Single-Phase Flow in Porous Media Based on Minkowski Functionals

M.V. Chernyavskiy^{1*}, V.V. Timoshenko¹, A.I. Morkovkin², P.A. Grishin², A.B. Fedotov¹, E.A. Grachev¹

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

²Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russian Federation

*Corresponding author: Mikhail V. Chernyavskiy, e-mail: chernjavskiy.mv15@physics.msu.ru

Abstract. Studies of flow dynamics in complex disordered media are very important in many practical areas, such as materials science, soil science, groundwater engineering, chemical engineering, and especially petroleum and gas engineering. Integral geometry methods are a useful tool for studying complex media. In this work, it is shown that, for a given porous media class, the by-layer mean flow velocity for any sample within the same class can be characterized as a function of Minkowski functionals, allowing to avoid costly natural core flood experiments or numerical simulation for screening purposes. This paper proposes the flow characterization method based on integral geometry. This method allows for obtaining the single-phase fluid flow velocity characterization models across a wide range of porous media classes for a quick estimation of the mean by-layer velocity distribution purely by extracting the geometrical measures from binary sample images. Samples from gas reservoirs are chosen as the relevant porous media examples, with regard to the growing importance of this type of reservoir caused by the global shift towards natural gas as a key energy source. Direct comparison with numerical simulation based on Stokes equation was made with commercial class software. The results demonstrate that the proposed algorithm has a relatively high degree of statistical significance and closely captures mean velocity trends. That provides a useful tool for quick, robust modelling for screening, agile calculations, and upscaling tasks.

Keywords: porous media, Stokes equation, integral geometry, Minkowski functionals, gas condensate flow

Acknowledgments

This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Agreement No. 075-10-2022-011.

The authors thank the reviewers for their valuable comments and suggestions, which helped improve the work.

Conflict of Interest

The authors declare no conflicts of interest.

Recommended citation: Chernyavskiy M.V., Timoshenko V.V., Morkovkin A.I., Grishin P.A., Fedotov A.B., Grachev E.A. (2026). Mean Velocity Calculation for Single-Phase Flow in Porous Media Based on Minkowski Functionals. *Georesursy = Georesources*, 28(1), pp. 3–18. <https://doi.org/10.18599/grs.2026.1.6>

References

- Adler P. (1992). *Porous Media: Geometry and Transports*; Butterworth-Heinemann series in chemical engineering, Elsevier Science.
- Ahmed T. (2010). Gas Reservoirs. *Reservoir Engineering Handbook*, pp. 855–908. <https://doi.org/10.1016/B978-1-85617-803-7.50021-3>
- Armstrong R.T., McClure J.E., Robins V., Liu, Z., Arns C.H., Schlüter S. & Berg S. (2019). Porous Media Characterization Using Minkowski Functionals: Theories, Applications and Future Directions. *Transport in Porous Media*, 130(1), pp. 305–335. <https://doi.org/10.1007/s11242-018-1201-4>
- Arns C., Knackstedt M. & Mecke K. (2010). 3D structural analysis: sensitivity of Minkowski functionals. *Journal of Microscopy*, 240(3), pp. 181–196. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2818.2010.03395.x>
- Arns C., Knackstedt M., Limaye A., Sakellariou A., Senden T., Sheppard A., Sok R., Pinczewski W. & Bunn G. (2004). Digital Core Laboratory: Properties of Reservoir Core Derived from 3D Images. *Proceedings of SPE Asia Pacific Conference on Integrated Modelling for Asset Management*. <https://doi.org/10.2523/87009-ms>
- Arns C.H., Knackstedt M.A., Pinczewski W.V. & Mecke K.R. (2001). Euler-Poincaré characteristics of classes of disordered media. *Physical Review E*, 63(3). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.031112>
- Bear J. (1975). Dynamics of Fluids in Porous Media. *Soil Science*, 120(2), pp. 162–163. <https://doi.org/10.1097/00010694-197508000-00022>
- Blunt M.J. (2016). Multiphase Flow in Permeable Media. <https://doi.org/10.1017/9781316145098>
- Blunt M.J. (2017). The Imperial College Lectures in Petroleum Engineering. <https://doi.org/10.1142/q0062>
- Blunt M.J., Akai T. & Bijeljic B. (2020). Evaluation of methods using topology and integral geometry to assess wettability. *Journal of Colloid and Interface Science*, 576, pp. 99–108. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2020.04.118>
- Boelens A.M., Tchelepi H.A. (2021). QuantImPy: Minkowski functionals and functions with Python. *SoftwareX*, 16, 100823. <https://doi.org/10.1016/j.softx.2021.100823>

- Bonnesen T., Fenchel W. (1934). Theorie der Konvexen Körper. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-47404-0>
- Cnudde V., Boone M. (2013). High-resolution X-ray computed tomography in geosciences: A review of the current technology and applications. *Earth-Science Reviews*, 123, pp. 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2013.04.003>
- Edelsbrunner H. (2014). A Short Course in Computational Geometry and Topology. *SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology*. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-05957-0>
- Ferréol B., Rothman D.H. (1995). Lattice-Boltzmann simulations of flow through Fontainebleau sandstone. *Transport in Porous Media*, 20(1-2), pp. 3–20. <https://doi.org/10.1007/BF00616923>
- GeoDict simulation software Release 2022. Math2Market GmbH, Germany. <https://doi.org/10.30423/release.geodict2022>
- Haque R.A., Mitra A.J. & Dutta T. (2024). Fluid flow in three-dimensional porous systems shows power law scaling with Minkowski functionals. *Physics of Fluids*, 36(11). <https://doi.org/10.1063/5.0238751>
- Hounsfield G.N. (1973). Computerized transverse axial scanning (tomography): Part I. Description of system. *The British Journal of Radiology*, 46(552), pp. 1016–1022. <https://doi.org/10.1259/0007-1285-46-552-1016>
- Ivonin D., Kalnin T., Grachev E. & Shein E. (2020). Quantitative Analysis of Pore Space Structure in Dry and Wet Soil by Integral Geometry Methods. *Geosciences*, 10(9), 365. <https://doi.org/10.3390/geosciences10090365>
- Ivonin D.A., Grishin P.A. & Grachev E.A. (2021). Quantitative Analysis of Samples of Natural Hydrocarbon Reservoirs by the Methods of Integral Geometry and Topology. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 57(3), pp. 366–374. <https://doi.org/10.1134/S106935132103006X>
- Kalnin T.G., Ivonin D.A., Abrosimov K.N., Grachev E.A. & Sorokina N.V. (2021). Analysis of Tomographic Images of the Soil Pore Space Structure by Integral Geometry Methods. *Eurasian Soil Science*, 54(9), pp. 1400–1409. <https://doi.org/10.1134/S1064229321090039>
- Legland D. (2024). MatImage. GitHub. <https://github.com/mattools/matImage/releases/tag/v1.2.4>
- Legland D., Kiéu K. & Devaux M. (2011). Computation of Minkowski Measures on 2D and 3D Binary Images. *Image Analysis & Stereology*, 26(2), 83. <https://doi.org/10.5566/ias.v26.p83-92>
- Liu Z., Herring A., Arns C., Berg S. & Armstrong R.T. (2017). Pore-Scale Characterization of Two-Phase Flow Using Integral Geometry. *Transport in Porous Media*, 118(1), pp. 99–117. <https://doi.org/10.1007/s11242-017-0849-5>
- Mantz H., Jacobs K. & Mecke K. (2008). Utilizing Minkowski functionals for image analysis: a marching square algorithm. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008(12), P12015. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/12/P12015>
- Matheron G. (1976). Random Sets and Integral Geometry. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 139(2), 277. <https://doi.org/10.2307/2345196>
- Mattila K., Puurtinen T., Hyväluoma J., Surmas R., Myllys M., Turpeinen T., Robertsén F., Westerholm J. & Timonen J. (2016). A prospect for computing in porous materials research: Very large fluid flow simulations. *Journal of Computational Science*, 12, pp. 62–76. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2015.11.013>
- McClure J.E., Armstrong R.T., Berrill M.A., Schlüter S., Berg S., Gray W.G. & Miller C.T. (2018). Geometric state function for two-fluid flow in porous media. *Physical Review Fluids*, 3(8). <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.084306>
- Mecke K.R. (2000). Additivity, Convexity, and Beyond: Applications of Minkowski Functionals in Statistical Physics. *Lecture Notes in Physics*, pp. 111–184. https://doi.org/10.1007/3-540-45043-2_6
- Mecke K., Arns C.H. (2005). Fluids in porous media: a morphometric approach. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 17(9), S503–S534. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/17/9/014>
- Michielsen K., De raedt H. (2001). Integral-geometry morphological image analysis. *Physics Reports*, 347(6), pp. 461–538. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00106-X](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00106-X)
- Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. (2021). Introduction to Linear Regression Analysis; Wiley.
- Ohser J., Mücklich F. (2001). Statistical Analysis of Microstructures in Materials Science. *Practical Metallography*, 38(9), pp. 538–539. <https://doi.org/10.1515/pm-2001-380907>
- Otsu N. (1979). A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 9(1), pp. 62–66. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1979.4310076>
- Patankar S. (1980). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow; Electro Skills Series, Hemisphere Publishing Corporation.
- Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., Michel V., Thirion B., Grisel O., Blondel M., Prettenhofer P., Weiss R.; Dubourg V., et al. (2011). Scikit-learn: Machine Learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12, pp. 2825–2830.
- Satter A., Iqbal G.M. (2015). Reservoir Engineering: The Fundamentals, Simulation, and Management of Conventional and Unconventional Recoveries. pp. 1–472. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-800219-3.00001-2>
- Saxena N., Hofmann R., Alpak F.O., Berg S., Dieterich J., Agarwal U., Tandon K., Hunter S., Freeman J., Wilson O.B. (2017). References and benchmarks for pore-scale flow simulated using micro-CT images of porous media and digital rocks. *Advances in Water Resources*, 109, pp. 211–235. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2017.09.007>
- Scheidegger A.E. (1957). The Physics of Flow Through Porous Media (3rd Edition). University of Toronto Press. doi: 10.3138/9781487583750
- Schoen J. (2015). Physical Properties of Rocks - Fundamentals and Principles of Petrophysics. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100404-3.00009-3>
- Scholz C., Wirner F., Götz J., Rude U., Schröder-Turk G., Mecke K., Bechinger C. (2012). Permeability of Porous Materials Determined from the Euler Characteristic. *Physical review letters*, 109, 264504. doi: 10.1103/PhysRevLett.109.264504
- Scholz C., Wirner F., Klatt M.A., Hirnise D., Schröder-Turk G.E., Mecke K., Bechinger C. (2015). Direct relations between morphology and transport in Boolean models. *Phys. Rev. E*, 92, 43023. doi: 10.1103/PhysRevE.92.043023
- Seabold S., Perktold J. (2010). Statsmodels: Econometric and Statistical Modeling with Python. SciPy 2010, <https://doi.org/10.25080/Majora-92bf1922-011>
- Serra J.P.F. (1983). Image Analysis and Mathematical Morphology.
- Sezgin M., Sankur B. (2004). Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation. *Journal of Electronic Imaging*, 13(1). <https://doi.org/10.1117/1.1631315>
- Sheppard A.P., Sok R.M. & Averdunk H. (2004). Techniques for image enhancement and segmentation of tomographic images of porous materials. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 339(1-2), pp. 145–151. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.03.057>
- Sibiriyakov B., Leite L. & Sibiriyakov E. (2021). Porosity, specific surface area and permeability in porous media. *Journal of Applied Geophysics*, 186, 104261. <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2021.104261>
- Slotte P.A., Berg C.F. & Khanamiri H.H. (2020). Predicting Resistivity and Permeability of Porous Media Using Minkowski Functionals. *Transport in Porous Media*, 131(2), pp. 705–722. <https://doi.org/10.1007/s11242-019-01363-2>
- Tiab D., Donaldson E.C. (2011). Petrophysics: Theory and Practice of Measuring Reservoir Rock and Fluid Transport Properties. Elsevier Science.
- Varoquaux G., Buitinck L., Louppe G., Grisel O., Pedregosa F. & Mueller A. (2015). Scikit-learn. *GetMobile: Mobile Computing and Communications*, 19(1), pp. 29–33. <https://doi.org/10.1145/2786984.2786995>
- Versteeg H., Malalasekera W. (2007). An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method; Pearson Education Limited.
- Wang D., Song Y., Wang P., Li G., Niu W., Shi Y. & Zhao L. (2022). Study on Oil Recovery Mechanism of Polymer-Surfactant Flooding Using X-ray Microtomography and Integral Geometry. *Molecules*, 27(23), 8621. <https://doi.org/10.3390/molecules27238621>
- Wiegmann A., Iliev O., Schindelin A. (2010). Computer aided engineering of filter materials and pleated filters.
- Xiong Y., Long X., Huang G. & Furman A. (2019). Impact of pore structure and morphology on flow and transport characteristics in randomly repacked grains with different angularities. *Soils and Foundations*, 59(6), pp. 1992–2006. <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2019.10.002>
- Zeng Z., Grigg R. (2006). A Criterion for Non-Darcy Flow in Porous Media. *Transport in Porous Media*, 63(1), pp. 57–69. <https://doi.org/10.1007/s11242-005-2720-3>

About the Authors

Mikhail V. Chernyavskiy – PhD student, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
1-2 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation
e-mail: chernjavskiy.mv15@physics.msu.ru

Vasilii V. Timoshenko – PhD student, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
1-2 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation
e-mail: timoshenko.vv19@physics.msu.ru

Andrey I. Morkovkin – Engineer, Center for Hydrocarbon Recovery, Skolkovo Institute of Science and Technology
30, bld. 1, Bolshoy Boulevard, Moscow, 121205, Russian Federation
e-mail: a.morkovkin@skoltech.ru

Pavel A. Grishin – Deputy Director for laboratory facilities, Center for Hydrocarbon Recovery, Skolkovo Institute of Science and Technology
30, bld. 1, Bolshoy Boulevard, Moscow, 121205, Russian Federation
e-mail: p.grishin@skoltech.ru

Andrey B. Fedotov – PhD student, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University,
1-2 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation
e-mail: ab.fedotov@physics.msu.ru

Eugene A. Grachev – Cand. Sci. (Technology), Associate Professor, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
1-2 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation
e-mail: grachevea@gmail.com

*Manuscript received 18 May 2025;
Accepted 11 August 2025; Published 30 March 2026*

© 2026 The Authors. This article is published in open access under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)