

Построение адаптивных гидродинамических моделей пониженного порядка на основе метода POD-DEIM

Д.С. Волосков*, Д.А. Коротеев

Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия

Предложен метод построения адаптивных гидродинамических моделей пониженного порядка POD-DEIM для задач оптимизации разработки и адаптации к историческим данным, основанный на адаптации базисов ортогональных разложений к изменяющейся конфигурации модели. Метод предполагает использование информации, содержащейся в базисах исходной модели, и дополнение их новыми компонентами вместо построения последующих моделей с нуля. Применение адаптации базисов позволяет существенно снизить вычислительные затраты на построение моделей пониженного порядка и открывает возможность применения подобных моделей для задач, требующих множественных расчетов моделей с различными конфигурациями. В работе реализована модель POD-DEIM для задачи двухфазной фильтрации и рассмотрены примеры адаптации данной модели к изменениям конфигурации скважин и геологических свойств коллектора. Предложен обобщенный подход применения моделей POD-DEIM в комбинации с методом адаптации базисов для решения оптимизационных задач, таких как оптимизация разработки, выбор оптимальных расположения, геометрии и режима скважин, а также адаптация гидродинамических моделей к историческим данным.

Ключевые слова: гидродинамическое моделирование, модели пониженного порядка, оптимизация разработки, адаптация к историческим данным

Для цитирования: Волосков Д.С., Коротеев Д.А. (2023). Построение адаптивных гидродинамических моделей пониженного порядка на основе метода POD-DEIM. *Георесурсы*, 25(4), с. 69–81. <https://doi.org/10.18599/grs.2023.4.4>

Введение

При решении многих аналитических задач, возникающих при разработке нефтегазовых месторождений, используются трехмерные гидродинамические модели. Такие модели основаны на численном решении системы дифференциальных уравнений в частных производных для оценки динамики полей физических параметров, таких как поровое давление и фазовые насыщенности порового флюида (Fanchi, 2018). Многие приложения гидродинамического моделирования требуют множественных расчетов с различными параметрами, например, для поиска оптимального сценария разработки или адаптации модели к историческим данным, что, в совокупности с большой сложностью реалистичных моделей, приводит к огромным затратам временных и вычислительных ресурсов, что делает невозможным применение полноразмерных гидродинамических моделей для решения подобных задач и обуславливают исследования, направленные на снижение вычислительных затрат при гидродинамическом моделировании.

Для этой цели разрабатываются так называемые методы моделирования пониженного порядка. Для решения задач гидродинамического моделирования часто используются методы, основанные на истинном ортогональном разложении (Proper Orthogonal Decomposition – POD).

В этих методах POD используется для представления решаемой системы уравнений в пространстве пониженной размерности: переменные проецируются в пространство, заданное POD-базисом, в котором решается система уравнений пониженного порядка, а результат решения проецируется обратно в пространство полной размерности.

Методы, основанные на POD, позволяют существенно снизить вычислительные затраты при решении линейных задач. Однако в случае применения к нелинейным задачам, возникают сложности, связанные с вычислением нелинейной части в полноразмерном пространстве. При решении нелинейных систем уравнений применяются итеративные алгоритмы, такие как метод Ньютона. На каждой итерации требуются вычисление нелинейного функционала и оценка матрицы Якоби системы уравнений: при использовании POD для таких расчетов требуется на каждой итерации проецировать текущее приближенное решение в пространство полной размерности для расчета полноразмерного нелинейного функционала и оценки матрицы Якоби, а затем проецировать матрицу Якоби обратно в пространство, определенное POD-базисом. Необходимость множественных проекций из пространства пониженной размерности и обратно, а также расчет нелинейного функционала в полноразмерном пространстве значительно увеличивают вычислительные затраты.

Для более эффективной работы с нелинейностями в методах, основанных на POD, были разработаны несколько подходов. В (Chaturantabut, Sorensen, 2010) представлен метод дискретной эмпирической интерполяции (Discrete Empirical Interpolation Method – DEIM), позволяющий оценивать нелинейный функционал только

* Ответственный автор: Дмитрий Сергеевич Волосков
e-mail: dmitry.voloskov@skoltech.ru

© 2023 Коллектив авторов

Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

в некотором наборе точек и затем неявным образом интерполировать эти значения для получения представления в пространстве пониженной размерности. Комбинация POD и DEIM стала одним из широко применяемых методов для построения гидродинамических моделей пониженного порядка (Efendiev et al., 2016; Tan et al., 2019; Yang et al., 2016). В (Rewinski & White, 2003) предложен метод кусочной линеаризации траектории (Trajectory Piecewise Linearization – TPWL). В этом методе предварительно рассчитывается набор состояний системы и матриц Якоби, в дальнейшем же система линеаризуется в окрестности этих состояний. Метод TPWL также может быть применен к системе в пространстве пониженной размерности, например, полученной с помощью POD. Комбинация POD и TPWL (POD-TPWL) часто применяется к гидродинамическим моделям месторождений (Cardoso, 2010; He et al., 2011). В (Trehan, Durlafsky, 2016) доработали метод TPWL, заменив линейную аппроксимацию квадратичной (Trajectory Piecewise Quadratic extension – TPWQ), и применили комбинацию этого метода с POD (POD-TPWQ) для моделирования двухфазной фильтрации в пористой среде.

В настоящее время активно ведется разработка методов моделирования пониженного порядка, основанных на подходах машинного обучения. В (Kani, Elsheikh, 2017, 2018) разработали подход глубоких остаточных нейронных сетей (Deep Residual Recurrent Neural Network – DR-RNN) и применили его к моделированию двухфазной фильтрации в пористой среде. Ряд подходов основан на использовании нейросетевых автокодировщиков (Jin et al., 2020; Temirchev et al., 2020), с помощью которых осуществляется переход в пространство скрытых переменных меньшей размерности. Еще одним направлением исследований является использование нейросетевых моделей, которые обучаются корректно использовать физические уравнения (Physics Informed Neural Networks) (Fraces et al., 2020; Gasmi, Tchepi, 2021).

Многие задачи, где применяется гидродинамическое моделирование, связаны с множественными расчетами на соответствующих моделях с варьируемыми параметрами, например, для поиска оптимального сценария разработки или адаптации модели к историческим данным. Метод адаптации нейросетевой модели пониженного порядка к историческим данным представлен в (Slagionov et al., 2022). Авторы используют дифференцируемость модели и предлагают использовать для адаптации к историческим данным подходы, аналогичные применяемым для обучения модели. Несмотря на преимущества методов, основанных на машинном обучении, такие методы не всегда применимы из-за сложностей, возникающих при интерпретации результатов и необходимости данных в больших объемах для обучения.

Методы, основанные на POD, успешно применялись для поиска оптимальных режимов работы скважин (Jansen, Durlafsky, 2017; Trehan, Durlafsky, 2016). Однако в случаях, когда помимо режимов работы скважин меняются и другие параметры модели, например, расположение скважин или геологические свойства коллектора, POD-базис должен быть перестроен для каждой новой конфигурации, что связано со значительными вычислительными затратами и зачастую делает применение

классических моделей пониженного порядка, основанных на POD, нецелесообразным.

В (Voloskov, Pissarenko, 2021) предложен подход, позволяющий использовать информацию, содержащуюся в POD-базисе для исходной конфигурации модели, при построении базисов для варьируемых конфигураций модели. В этой работе рассмотрена модель двухфазной фильтрации в пористой среде в формулировке IMPES (уравнение на давление решается неявным методом, уравнение на насыщенность – явным), где POD применяется только к уравнению на давление. Поскольку уравнение на насыщенность решается в полноразмерном пространстве, соответствующие затраты вычислительных ресурсов зависят от размерности модели и для достаточно больших размерностей могут свести на нет полученный от понижения размерности. Еще одной особенностью модели является использование явной схемы решения уравнения на насыщенность, что накладывает ограничения на минимальный размер временного шага симуляции и также может быть ограничивающим фактором для применения этой модели.

В настоящей работе мы рассматриваем расширение этого метода на модель в последовательной неявной формулировке, где POD применяется к обоим уравнениям, а для более эффективной работы с нелинейностями используется DEIM. Последовательная неявная схема позволяет ослабить ограничения на минимальный шаг расчета, а применение POD для обоих уравнений и DEIM для интерполяции нелинейного функционала позволяет более эффективно использовать предлагаемый подход для работы с моделями больших размерностей. Для адаптации базиса, определяющего набор точек для DEIM, как и для адаптации самой выборки точек, предложен соответствующий алгоритм. В работе рассмотрено применение предлагаемого подхода для адаптации модели пониженного порядка POD-DEIM как для варьируемых параметров скважин (длины горизонтального ствола, азимутального угла, расположения устья) так и для варьируемых параметров геологических свойств коллектора (поля пористости и проницаемости) и предложен обобщенный подход к решению обратных задач, таких как оптимизация разработки или адаптация к историческим данным.

Материалы и методы

Модель двухфазной фильтрации в последовательной неявной формулировке

Математическая модель двухфазной фильтрации состоит из уравнений, представляющих законы сохранения массы для двух фаз (воды и нефти) (Monteagudo, Firoozabadi, 2004):

$$\frac{\partial \phi \rho_{o,w} s_{o,w}}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_{o,w} \mathbf{v}_{o,w}) + q_{o,w} = 0, \quad (1)$$

где индексы o и w обозначают нефтяную и водную фазы соответственно, ϕ – пористость, ρ – плотность флюида, s – насыщенность флюида, \mathbf{v} – скорость фильтрации, q – сток или источник. Насыщенности воды и нефти связаны соотношением

$$s_o + s_w = 1. \quad (2)$$

Скорость фильтрации определяется законом Дарси

$$\mathbf{v}_{o,w} = -\lambda_{o,w} \mathbf{K} \nabla (p_{o,w} - \rho_{o,w} g h), \quad (3)$$

где $\lambda = k_r/\mu$ – мобильность флюида, k_r – относительная фазовая проницаемость, \mathbf{K} – тензор абсолютной проницаемости, p – давление флюида, g – ускорение силы тяжести, h – глубина. Пренебрегая капиллярными эффектами, сжимаемостью и гравитацией и подставляя (3) в (1), мы получаем систему уравнений на давление:

$$\nabla \cdot \mathbf{K} \lambda \nabla p = q, \quad (4)$$

где $\lambda = \lambda_o + \lambda_w$ – полная подвижность, p – поровое давление, $q = q_o + q_w$ – источник или сток, насыщенность определяется из уравнения:

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_w = \frac{q_w}{\rho_w}, \quad (5)$$

Для дискретизации системы уравнений область делится на блоки, для ее решения используется метод контрольных объемов (Monteagudo, Firoozabadi, 2004). Уравнение на давление в матричной форме может быть записано в виде

$$\mathbf{A} \mathbf{s}_p = \mathbf{b}, \quad (6)$$

где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица коэффициентов, \mathbf{s}_p – вектор давлений, каждое значение вектора представляет собой усредненное значение давления в ячейке, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ – вектор правых частей уравнений.

Уравнение на насыщенность запишется как

$$\frac{d\mathbf{s}_s}{dt} + \mathbf{B}(\mathbf{v}) \mathbf{f}_w(\mathbf{s}_s) = \mathbf{d}, \quad (7)$$

где $\mathbf{s}_s \in \mathbb{R}^n$ – вектор водонасыщенностей в ячейках, $\mathbf{B}(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрица коэффициентов, зависящая от поля давлений, где m – число граней ячеек, $\mathbf{f}_w(\mathbf{s}_s)$ – нелинейный функционал ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$), отображающий поле водонасыщенностей в значения относительной фазовой проницаемости воды на гранях. Уравнения (6) и (7) связаны через зависимость матрицы \mathbf{A} от значений водонасыщенности через относительные фазовые проницаемости и зависимости матрицы \mathbf{B} от поля давлений. Для решений таких связанных систем уравнений существует несколько методов. Мы используем последовательную неявную схему (Pacheco et al., 2017): на каждом временном шаге уравнение (6) решается неявно, при этом для составления матрицы \mathbf{A} используются значения водонасыщенности с предыдущего шага; затем полученные значения давлений используются для составления матрицы \mathbf{B} , уравнение (7) решается также неявно с использованием метода Ньютона.

Модель пониженного порядка POD-DEIM

Истинное ортогональное разложение

Целью истинного ортогонального разложения (POD) является получение оптимального базиса пространства пониженного порядка. POD позволяет получить разложение многомерной функции (например, распределение физической величины в пространстве) как линейную комбинацию ортонормированных базисных компонент (Kunisch, Volkwein, 2003):

$$x'_i = \sum_{k=1}^N a_i u_i^k. \quad (8)$$

POD-базис оптимален в том смысле, что для любой размерности базиса r выполняется

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(x_{i,j} - \sum_{k=1}^r (u_i^k a_j^k) \right)^2 = \min_{\Phi, \mathbf{b}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(x_{i,j} - \sum_{k=1}^r (\phi_i^k b_j^k) \right)^2, \quad (9)$$

где $x_{i,j}$ – значение i -й переменной на j -м временном шаге, u_i^k – значение i -го элемента k -й компоненты базиса, a_j^k – соответствующий коэффициент разложения. Метод основан на применении сингулярного разложения (Singular Value Decomposition – SVD) матрицы «снимков» состояний модели:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^*, \quad (10)$$

где $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица левых сингулярных векторов, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – матрица правых сингулярных векторов, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрица с неотрицательными элементами (сингулярными числами) на главной диагонали и нулевыми элементами вне главной диагонали.

Оптимальный базис пониженного порядка состоит из первых r левых сингулярных векторов (столбцов матрицы \mathbf{U}).

Таким образом, для получения POD-базиса для конкретной задачи необходимо составить матрицу \mathbf{X}_s «снимков» состояний системы (для задачи двухфазной фильтрации – векторы значений давления и водонасыщенности), каждый столбец которой \mathbf{s}_i является вектором состояния системы (для двумерных или трехмерных систем значения преобразуются к одномерному виду), выполнить сингулярное разложение этой матрицы (10) и составить базис пониженного порядка \mathbf{U}^r из первых r столбцов матрицы \mathbf{U} . Тогда система линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{A} \mathbf{s} = \mathbf{b} \quad (11)$$

может быть преобразована к системе пониженного порядка

$$\mathbf{A}^r \mathbf{s}^r = \mathbf{b}^r \quad (12)$$

где $\mathbf{A}^r = \mathbf{U}^{rT} \mathbf{A} \mathbf{U}^r$, $\mathbf{s}^r = \mathbf{U}^{rT} \mathbf{s}$, $\mathbf{b}^r = \mathbf{U}^{rT} \mathbf{b}$. После нахождения представления решения системы в пространстве пониженной размерности \mathbf{s}^r оценка решения в пространстве полной размерности \mathbf{s}' может быть найдена как $\mathbf{s}' = \mathbf{U}^r \mathbf{s}^r$.

Метод дискретной эмпирической интерполяции

Метод POD позволяет ускорить решение систем линейных алгебраических уравнений, в том числе возникающих при дискретизации линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Однако при попытке применить данный подход к нелинейным уравнениям возникают определенные сложности.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \mathbf{F}(\mathbf{y}(t)), \quad (13)$$

где $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор неизвестных, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица коэффициентов, определяемая пространственным дифференциальным оператором, \mathbf{F} – нелинейный функционал, вычисляемый поэлементно. Представление данного

уравнения в пространстве пониженной размерности, определенном POD-базисом, может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}^r(t) = \mathbf{A}^r \mathbf{y}^r(t) + \mathbf{U}^{rT} \mathbf{F}(\mathbf{U}^r \mathbf{y}^r(t)), \quad (14)$$

где $\mathbf{y}^r = \mathbf{U}^{rT} \mathbf{y}$ – представление вектора неизвестных в пространстве пониженной размерности, \mathbf{U}^r – POD-базис, $\mathbf{A}^r = \mathbf{U}^{rT} \mathbf{A} \mathbf{U}^r$. Для оценки нелинейного функционала $\mathbf{U}^{rT} \mathbf{F}(\mathbf{U}^r \mathbf{y}^r(t))$ необходимо вернуть текущее приближение вектора неизвестных в пространство полной размерности, вычислить нелинейный функционал и вернуть результат обратно в пространство пониженной размерности. Данные операции сопряжены со значительными затратами вычислительных ресурсов.

Авторы работы (Chaturantabut, Sorensen, 2010) предложили метод DEIM, основанный на аппроксимации нелинейного члена путем проецирования в пространство пониженной размерности, аппроксимирующее пространство, порожденное нелинейным функционалом. Для простоты дальнейшей записи обозначим $\mathbf{F}(\mathbf{U}^r \mathbf{y}^r(t))$ как $\mathbf{f}(t)$. Аппроксимация $\mathbf{f}(t)$, полученная проекцией в подпространство, определенное базисом $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m\} \subset \mathbb{R}^n$, может быть записана в виде

$$\mathbf{f}(t) \approx \mathbf{Q} \mathbf{c}(t), \quad (15)$$

где $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{c}(t)$ – соответствующие коэффициенты. Для того чтобы найти вектор $\mathbf{c}(t)$, мы можем выбрать m различных строк из переопределенной системы уравнений $\mathbf{f}(t) \approx \mathbf{Q} \mathbf{c}(t)$. Для этого рассмотрим матрицу

$$\mathbf{P} = [\mathbf{e}_{\rho_1} \dots \mathbf{e}_{\rho_m}] \quad (16)$$

где \mathbf{e}_{ρ_i} – ρ_i -й столбец единичной матрицы $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Предположим, что матрица $\mathbf{P}^T \mathbf{Q}$ – невырожденная, тогда вектор коэффициентов $\mathbf{c}(t)$ может быть однозначно найден из системы уравнений

$$\mathbf{P}^T \mathbf{f}(t) = (\mathbf{P}^T \mathbf{Q}) \mathbf{c}(t). \quad (17)$$

Тогда аппроксимация (15) может быть записана как

$$\mathbf{f}(t) \approx \mathbf{Q} \mathbf{c}(t) = \mathbf{Q} (\mathbf{P}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{f}(t). \quad (18)$$

Для получения аппроксимации (18) необходимо определить базис \mathbf{Q} и матрицу \mathbf{P} . Базис может быть получен в результате применения POD к матрице снимков нелинейного функционала $\mathbf{F}(\mathbf{y}(t))$. Эти снимки могут быть получены в ходе того же расчета полноразмерной модели, что и снимки для POD-разложения основных переменных. Коэффициенты ρ_i и соответствующая матрица \mathbf{P} могут быть определены по этому базису с помощью следующего алгоритма.

1. Составляется матрица \mathbf{Q}' , включающая один столбец (первую компоненту базиса \mathbf{q}_1).
2. Находится позиция ρ максимального по модулю элемента \mathbf{q}_1 .
3. Составляется матрица \mathbf{P} , включающая один столбец (соответствующий столбец единичной матрицы \mathbf{e}_ρ).
4. Для каждой компоненты базиса \mathbf{q}_i , начиная со второй
 - 4.1. решается система уравнений $(\mathbf{P}^T \mathbf{Q}') \mathbf{c} = \mathbf{P}^T \mathbf{q}_i$ относительно \mathbf{c} ;
 - 4.2. находится остаток $\mathbf{r} = \mathbf{q}_i - \mathbf{Q}' \mathbf{c}$;
 - 4.3. находится позиция ρ максимального по модулю элемента \mathbf{r} ;
 - 4.4. матрица \mathbf{P} дополняется столбцом \mathbf{e}_ρ справа;
 - 4.5. матрица \mathbf{Q}' дополняется столбцом \mathbf{q}_i справа.

5. Матрица \mathbf{P} может быть использована для получения аппроксимации (18).

Модель пониженного порядка POD-DEIM для задачи двухфазной фильтрации

Рассмотрим дискретизированную модель, заданную уравнениями (6) и (7). Для решения системы уравнений мы используем последовательную неявную схему: получаем поле давлений для нового временного шага, решая неявно уравнение (6), при этом используются значения подвижностей флюида с предыдущего временного шага. После этого полученное поле давления используется для определения коэффициентов уравнения (7), которое также решается неявно с помощью метода Ньютона. Уравнение (6) в пространстве пониженной размерности примет вид

$$\mathbf{A}^r \mathbf{s}_p^r = \mathbf{b}^r, \quad (19)$$

где $\mathbf{A}^r = \mathbf{U}_p^{rT} \mathbf{A} \mathbf{U}_p^r$ – проекция матрицы коэффициентов в пространство, определенное POD-базисом \mathbf{U}_p^r , который может быть получен из сингулярного разложения матрицы снимков давления $\mathbf{S}_p^r, \mathbf{s}_p^r = \mathbf{U}_p^{rT} \mathbf{s}_p$ и $\mathbf{b}^r = \mathbf{U}_p^{rT} \mathbf{b}$ – проекции векторов давления и вектора свободных членов уравнений в POD-пространство.

Для получения POD-базиса водонасыщенности \mathbf{U}_s^r выполняли сингулярное разложение матрицы снимков \mathbf{S}_s^r . Уравнение на насыщенность (7) в пространстве пониженной размерности может быть записано как

$$\frac{d\mathbf{s}_s^r}{dt} + \mathbf{U}_s^{rT} \mathbf{B}(\mathbf{v}) \mathbf{f}_w(\mathbf{U}_s^r \mathbf{s}_s^r) = \mathbf{d}^r. \quad (20)$$

Преобразуем данное уравнение к виду

$$\frac{d\mathbf{s}_s^r}{dt} + \mathbf{U}_s^{rT} \mathbf{J}([\mathbf{M} \mathbf{g}_w(\mathbf{U}_s^r \mathbf{s}_s^r)]) \circ \mathbf{p}_{der} = \mathbf{d}^r. \quad (21)$$

Для пространственной дискретизации уравнений применяем метод контрольных объемов, где необходимо оценивать скорость флюида на гранях ячеек, для чего используем так называемую противопоточную схему (upwind scheme) (Young, 1981). Матрица $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_f \times n}$, где n_f – число граней между ячейками, n – число ячеек, отображает значения подвижности воды в ячейках в соответствующие значения на гранях, $\mathbf{g}_w(\mathbf{U}_s^r \mathbf{s}_s^r)$ – нелинейная функция вычисляющая значения подвижности воды в ячейках, $\mathbf{p}_{der} \in \mathbb{R}^{n_f}$ – оценки производной давления на гранях, $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$ – матрица, отображающая потоки флюида на гранях в изменения водонасыщенности в ячейках.

Мы применяем DEIM для аппроксимации нелинейного функционала

$$\mathbf{h} = \mathbf{J}([\mathbf{M} \mathbf{g}_w(\mathbf{U}_s^r \mathbf{s}_s^r)]) \circ \mathbf{p}_{der}. \quad (22)$$

Снимки h записываются в ходе того же расчета модели, что и снимки давлений и водонасыщенностей. DEIM-аппроксимация h имеет вид

$$\mathbf{h} \approx \mathbf{Q} (\mathbf{P}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{h}. \quad (23)$$

где $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ – матрица выбора точек для DEIM, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ – соответствующий POD-базис. Для вычисления выражения $\mathbf{P}^T \mathbf{h} = \mathbf{J}([\mathbf{M} \mathbf{g}_w(\mathbf{U}_s^r \mathbf{s}_s^r)]) \circ \mathbf{p}_{der}$ и, следовательно, для оценки всего поля h необходимо вычислить лишь $k(r \leq k \leq br)$ значений функции в ячейках, определяемых матрицей \mathbf{P}^T , и соседних с ними ячеек.

Метод адаптации базисов

Методы моделирования пониженного порядка, основанные на POD, в том числе и на POD-DEIM, часто применяются для подбора оптимальных режимов работы скважин. При этом модель пониженного порядка, построенная для одного сценария, применяется и для моделирования других сценариев (с изменившимися режимами работы скважин). Несмотря на это, некоторые приложения требуют моделирования множества сценариев с изменяющимися конфигурациями скважин или геологическими параметрами. В этом случае стандартная модель пониженного порядка, основанная на POD, не позволяет с достаточной точностью моделировать такие сценарии, и для каждой конфигурации должна быть построена своя модель, что требует генерации соответствующих снимков состояний и приводит к вычислительным затратам, которые зачастую делают нецелесообразным применение моделей, основанных на POD, для решения подобных задач.

Авторы работы (Voloskov, Pissarenko, 2021) предложили метод, позволяющий адаптировать POD-базис к новой конфигурации модели с использованием лишь небольшого числа дополнительных снимков. Рассмотрим POD-базис U_0^r , построенный для конкретной спецификации модели. Допустим, что нам требуется смоделировать сценарий добычи с изменившейся конфигурацией модели. Для этого рассчитаем несколько снимков состояний с обновленной конфигурацией и построим из них матрицу снимков S . Информация, содержащаяся в этих снимках и ортогональная базису U_0^r , может быть выражена в виде матрицы остаточных снимков, которые представляют собой разность оригинальных снимков и их проекции в пространство, определяемое базисом U_0^r , и обратно:

$$S^{res} = S - U_0^r U_0^{rT} S. \quad (24)$$

Мы можем применить SVD к матрице остаточных снимков S^{res} для получения базиса $U_{res}^r = [u_1 \dots u_i \dots u_{r_{res}}]$. Этот базис ортогонален исходному базису U_0^r , и комбинация компонент этих базисов может быть использована как новый базис пространства пониженной размерности для проекции уравнений. Предлагаемый подход заключается в дополнении исходного базиса несколькими компонентами остаточного базиса. Алгоритм может быть сформулирован следующим образом.

1. Рассчитывается небольшое число снимков состояний для новой конфигурации модели.
2. Составляется матрица снимков S .
3. Рассчитывается матрица остаточных снимков S^{res} (24).
4. Выполняется SVD матрицы S^{res} и составляется остаточный базис U_{res}^r из первых r_{res} левых сингулярных векторов.
5. Исходный базис U_0^r компонентами базиса U_{res}^r для получения нового базиса $\tilde{U}^r = [U_0^r U_{res}^r]$.
6. Базис \tilde{U}^r может быть использован в обновленной модели пониженного порядка.

В работе (Voloskov, Pissarenko, 2021) данный подход был применен только к уравнению на давление, мы же применяем этот метод также и к уравнению на водонасыщенность. Дополнительные снимки состояний водонасыщенности сохраняются во время того же расчета модели, что и снимки давлений, также сохраняются

снимки нелинейного функционала (22). Адаптация базисов пониженного порядка для полей давления и водонасыщенности выполняется аналогичным образом в соответствии с вышеописанным алгоритмом. Адаптация базиса для нелинейного функционала основана на тех же идеях, но требует дополнительных вычислений, так как, помимо самого базиса, требуется также обновление набора точек, в которых оценивается нелинейный функционал h . Соответствующий алгоритм может быть записан следующим образом.

1. Получение остаточного базиса Q_{res} аналогично базисам давления и водонасыщенности.
2. Обозначим $\tilde{Q} = Q_0$ новый базис.
3. Для каждой компоненты остаточного базиса q_{res_i}
 - 3.1. решается система уравнений $P^T \tilde{Q} c = P^T q_{res_i}$ относительно c ;
 - 3.2. находится остаток $r = q_{res_i} - \tilde{Q} c$;
 - 3.3. находится позиция ρ максимального по модулю элемента r ;
 - 3.4. матрица P дополняется столбцом e_ρ справа;
 - 3.5. матрица \tilde{Q} дополняется столбцом q_{res_i} справа.
4. Матрицы P и \tilde{Q} могут быть использованы в модели POD-DEIM.

Результаты

Валидация модели пониженного порядка POD-DEIM

Для численных экспериментов мы будем использовать трехмерную гидродинамическую модель ячейки разработки на регулярной сетке размерности $40 \times 40 \times 3$ с размером ячейки $25 \times 25 \times 10$ м. Синтетически сгенерированные поля пористости и проницаемости описывают высокопроницаемый канал, окруженный породами с меньшей проницаемостью (рис. 1).

В углах модели расположены вертикальные нагнетательные скважины, в центре – добывающая скважина с горизонтальным стволом, расположенным в верхнем слое модели. Расположение скважин представлено на рис. 2.

Для построения модели POD-DEIM необходимо собрать выборку снимков состояний модели, при этом для достижения наилучших результатов снимки должны максимально полно представлять пространство возможных состояний модели. Для этого был сгенерирован искусственный сценарий, в котором режимы работы нагнетательных скважин (забойное давление) случайным образом менялись на каждом шаге моделирования. В ходе расчета данного сценария были записаны снимки полей давления, насыщенности и значений функционала h (23). По этим снимкам была построена модель POD-DEIM, которая применялась для расчета тестового сценария. Для построения модели использовалось по 2000 снимков для каждой величины, POD-базис давления состоял из 40 компонент, базис насыщенности – из 40 компонент, базис h – из 200 компонент.

На рис. 3 представлены результаты расчета дебитов добывающей скважины с использованием модели POD-DEIM в сравнении с результатами расчета с использованием полноразмерной модели. Расчет выполнялся на 3000 дней с шагом 15 дней.

Были проведены также соответствующие расчеты с использованием модели пониженного порядка

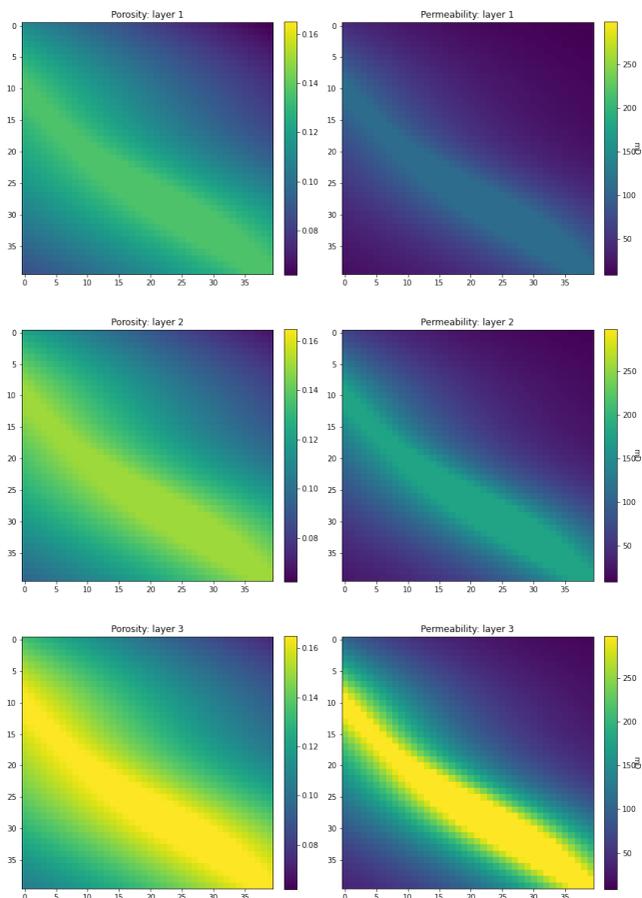


Рис. 1 Срезы полей пористости (слева) и проницаемости (справа) в тестовой модели (сверху вниз – первый, второй и третий слои)

в IMPES-формулировке, в которой POD применяется только для уравнения на давление. Для исследования возможности применения рассматриваемой модели для симуляций с большим временным шагом дополнительно были проведены соответствующие расчеты с шагом 150 дней.

Для расчетных динамических величин, таких как дебиты и насыщенности, были рассчитаны относительные квадратичные ошибки (Root Relative Square Error – RRSE). RRSE представляет собой ошибку относительно ошибки простейшей оценки (константного среднего значения) (Witten, 2011):

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i)^2}}$$

где y_i – истинное значение, \bar{y}_i – среднее значение, \hat{y}_i – полученная оценка.

Соответствующие значения представлены в табл. 1.

	RRSE			
	Модель POD-DEIM (временной шаг 15 дней)	Модель POD-Galerkin (IMPES) (временной шаг 15 дней)	Модель POD-DEIM (временной шаг 150 дней)	Модель POD-Galerkin (IMPES) (временной шаг 150 дней)
Водонасыщенность	0,019	0,014	0,02	0,16
Давление	0,037	0,022	0,09	0,37
Дебит воды	0,020	0,014	0,05	0,63
Дебит нефти	0,026	0,027	0,09	0,51

Табл. 1. RRSE расчета модели POD-DEIM и POD-Galerkin (IMPES) относительно полноразмерной модели

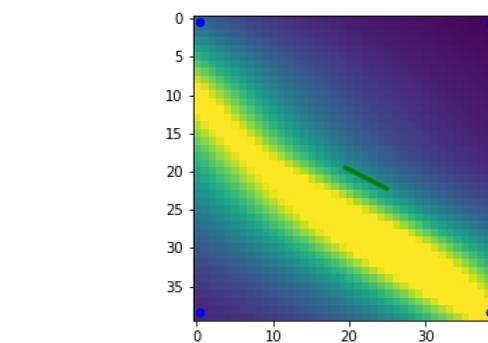


Рис. 2. Расположение скважин (синими кружочками обозначены нагнетательные скважины, зеленой линией – горизонтальный ствол добывающей скважины)

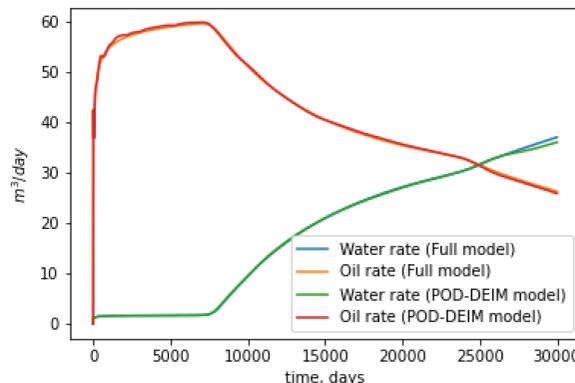


Рис. 3. Сравнение расчетных дебитов добывающей скважины с использованием модели POD-DEIM (зеленая кривая – дебит воды, красная – дебит нефти) с результатами, полученными с использованием полноразмерной модели (синяя кривая – дебит воды, оранжевая – дебит нефти)

В табл. 2 представлены значения времени, затраченного на соответствующие расчеты. Все расчеты проводились на рабочей станции с двумя процессорами Intel Xeon E5-2630 v3.

Данные расчеты показывают, что модель POD-DEIM может воспроизводить результаты расчета полноразмерной модели с точностью, достаточной для решения многих практических задач. Несмотря на то что на данном тестовом примере модель в IMPES-формулировке оказалась несколько быстрее, результаты расчетов с большим временным шагом показали, что IMPES-модель, в отличие от модели POD-DEIM, не способна воспроизвести подобные расчеты. Для многих приложений это позволяет достичь большей вычислительной эффективности с использованием модели POD-DEIM. Также модель POD-DEIM может быть более эффективна при применении к задачам большей размерности.

	Модель POD-DEIM (временной шаг 15 дней)	Модель POD-Galerkin в IMPES-формулировке (временной шаг 15 дней)	Модель POD-DEIM (временной шаг 75 дней)	Модель POD-Galerkin в IMPES-формулировке (временной шаг 75 дней)	Полно- размерная модель
Время расчета	25,1 с	14,2 с	4,7 с	2,6 с	244 с

Табл. 2. Время расчета тестового сценария

Применение модели POD-DEIM при изменении параметров скважин

Для некоторых приложений, например, для поиска оптимального сценария разработки, требуется выполнять расчеты с различными конфигурациями скважин. Рассмотрим сценарий, в котором изменен азимутальный угол горизонтального ствола добывающей скважины относительно конфигурации, для которой была построена исходная модель POD-DEIM (рис. 4).

На рис. 5а приведено сравнение дебитов, полученных на модели POD-DEIM, построенной для исходной конфигурации скважин, с результатами расчета с использованием полноразмерной модели. Из рисунка видно, что модель POD-DEIM, построенная для исходной конфигурации скважин, не способна с достаточной точностью воспроизвести динамику потоков флюидов при измененной конфигурации. В общем случае, при изменении конфигурации требуется построение новой модели POD-DEIM с нуля, что требует расчета большого количества снимков состояний (в данном случае требуется порядка 2000 снимков).

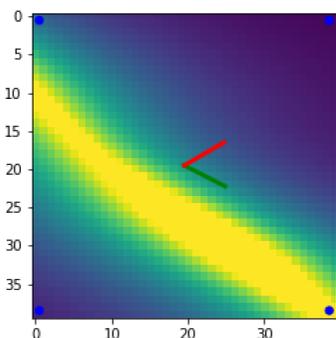


Рис. 4. Расположение скважин (синими кружочками обозначены нагнетательные скважины, зеленой линией – горизонтальный ствол добывающей скважины в конфигурации, для которой была построена модель POD-DEIM, красной линией – горизонтальный ствол добывающей скважины в измененной конфигурации)

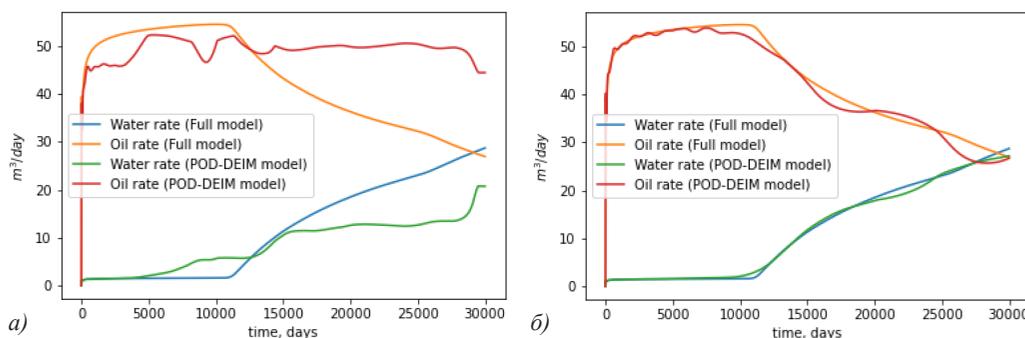


Рис. 5. Сравнение расчетных дебитов добывающей скважины с использованием модели POD-DEIM для измененной конфигурации скважин (зеленая кривая – дебит воды, красная – дебит нефти) с результатами, полученными с использованием полноразмерной модели (синяя кривая – дебит воды, оранжевая – дебит нефти): (а) с базисами для несовпадающей конфигурации, (б) с адаптированными базисами

Соответствующие вычислительные затраты могут сделать применение модели POD-DEIM нецелесообразным. Однако, используя рассмотренный выше метод адаптации базисов, мы можем адаптировать модель к измененной конфигурации скважин с использованием значительно меньшего количества снимков. В приведенном ниже примере для адаптации базисов мы используем по 100 снимков для давления, Водонасыщенность и функционала h . Снимки сгенерированы полноразмерной моделью с обновленной конфигурацией скважин, при этом для наибольшей репрезентативности снимки сделаны на временных отсчетах, равномерно распределенных по всему интервалу моделирования. Режимы работы нагнетательных скважин, так же как и при построении исходной модели POD-DEIM, изменяются случайным образом. При адаптации базисов было изменено 4 компоненты базиса давления, 4 компоненты базиса насыщенности и 10 компонент базиса функционала h . Результаты моделирования дебитов добывающей скважины в сравнении с результатами расчета на полноразмерной модели представлены на рис. 5б.

В табл. 3 представлены значения RRSE относительно полноразмерной модели для моделей POD-DEIM с базисами, построенными для несовпадающей конфигурацией скважин, и с адаптированными базисами.

Аналогичный численный эксперимент был проведен при изменении длины добывающей секции горизонтального ствола скважины (рис. 2): ее длина была изменена со 150 м до 120 м. Адаптация базисов выполнялась по 100 снимкам: были обновлены 4 компоненты базиса давления, 4 компоненты базиса насыщенности и 10 компонент базиса функционала h . На рис. 6 представлены результаты расчета с использованием модели POD-DEIM с базисами, построенными для исходной конфигурации скважины, и с адаптированными базисами. Соответствующие значения RRSE представлены в табл. 4.

Еще одним возможным параметром, который можно варьировать при поиске оптимального сценария разработки, является пространственное положение скважины.

	RRSE модели POD-DEIM с базисами для несовпадающей конфигурации скважин	RRSE модели POD-DEIM с адаптированными базисами
Водонасыщенность	2,530	0,053
Давление	1,992	0,150
Дебит воды	0,630	0,062
Дебит нефти	1,203	0,170

Табл. 3. RRSE расчета модели POD-DEIM относительно полноразмерной модели при изменении азимутального угла горизонтальной скважины

	RRSE модели POD-DEIM с базисами для несовпадающей конфигурации скважин	RRSE модели POD-DEIM с адаптированными базисами
Водонасыщенность	1,369	0,023
Давление	1,575	0,064
Дебит воды	0,639	0,048
Дебит нефти	1,282	0,061

Табл. 4 RRSE расчета модели POD-DEIM относительно полноразмерной модели при изменении длины горизонтального ствола добывающей скважины

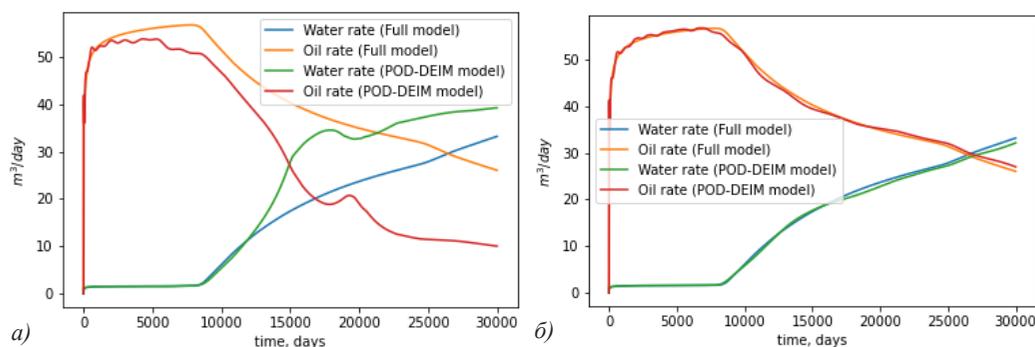


Рис. 6. Сравнение расчетных дебитов добывающей скважины с использованием модели POD-DEIM для измененной конфигурации скважин (зеленая кривая – дебит воды, красная – дебит нефти) с результатами, полученными с использованием полноразмерной модели (синяя кривая – дебит воды, оранжевая – дебит нефти); (а) с базисами для несовпадающей конфигурации, (б) с адаптированными базисами

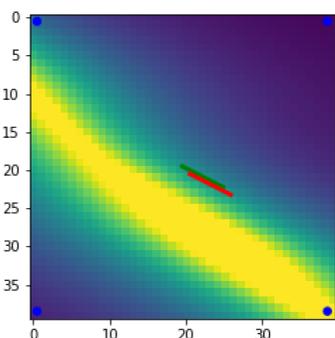


Рис. 7. Расположение скважин (синими кружочками обозначены нагнетательные скважины, зеленой линией – горизонтальный ствол добывающей скважины в конфигурации, для которой была построена модель POD-DEIM, красной линией – горизонтальный ствол добывающей скважины в измененной конфигурации)

Рассмотрим в качестве примера смещение горизонтального ствола на 25 м по осям Ox и Oy и на 10 м по оси Oz (рис. 7).

Адаптация базисов, как и в предыдущих случаях, выполнялась по 100 дополнительным снимкам, обновлялось по 4 компоненты базиса давления и водонасыщенности и 10 компонент базиса функционала h . Расчетные дебиты добывающей скважины показаны на рис. 8, значения ошибки представлены в табл. 5.

Применение модели POD-DEIM при изменении геологических свойств модели

Еще одним классом задач, требующим множественных прогонов гидродинамических моделей, является

адаптация модели к историческим данным. В этих задачах зачастую требуется проводить расчеты для гидродинамических моделей с различными полями геологических свойств, добываясь совпадения результатов расчета с историческими данными по скважинам. В данном параграфе вместо изменения конфигурации скважин мы рассмотрим изменения полей пористости и проницаемости.

Исходная модель POD-DEIM была построена для полей пористости и проницаемости, показанных на рис. 1, и конфигурации скважин, изображенной на рис. 2. Затем были изменены форма и положение высокопроницаемого канала. Обновленные поля пористости и проницаемости показаны на рис. 9.

Для сценария с обновленными полями пористости и проницаемости были проведены расчеты с использованием модели POD-DEIM с базисами, построенными для исходных свойств. Результаты расчета дебитов добывающей скважины показаны на рис. 10а. Можно видеть, что, как и в случае с изменением конфигурации скважин, модель не может с достаточной точностью описать динамику добычи. Была выполнена адаптация базисов модели к изменившимся геологическим свойствам. Адаптация производилась аналогично случаям, рассмотренным в предыдущем параграфе: использовалось по 100 дополнительных снимков давления, водонасыщенности и функционала h , было обновлено по 4 компоненты базисов давления и насыщенности и 10 компонент базиса функционала h . Результаты расчета дебитов добывающей скважины с использованием адаптированной модели POD-DEIM представлены на рис. 10.

В табл. 6 представлены соответствующие значения ошибки.

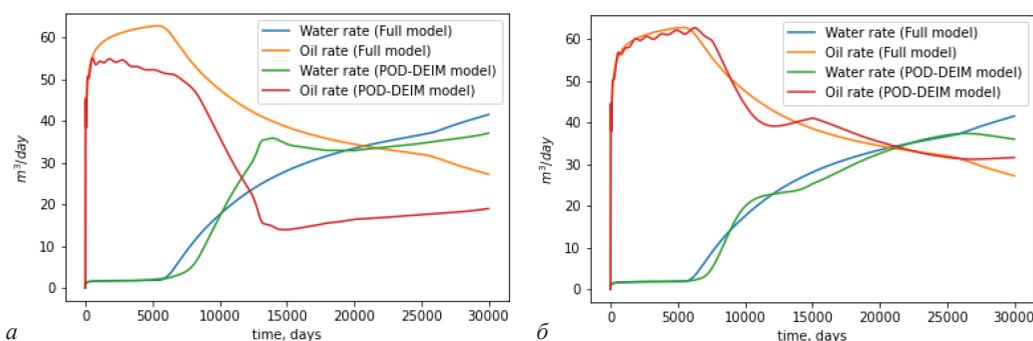


Рис. 8. Сравнение расчетных дебитов добывающей скважины с использованием модели POD-DEIM для измененной конфигурации скважин (зеленая кривая – дебит воды, красная – дебит нефти) с результатами, полученными с использованием полноразмерной модели (синяя кривая – дебит воды, оранжевая – дебит нефти): (а) с базами для несовпадающей конфигурации, (б) с адаптированными базами

	RRSE модели POD-DEIM с базами для несовпадающей конфигурации скважин	RRSE модели POD-DEIM с адаптированными базами
Водонасыщенность	3,130	0,053
Давление	1,724	0,10
Дебит воды	0,262	0,134
Дебит нефти	1,310	0,175

Табл. 5 RRSE расчета модели POD-DEIM относительно полноразмерной модели при изменении местоположения добывающей скважины

Обсуждение результатов

Многие приложения гидродинамического моделирования в задачах, возникающих при разработке месторождений, требуют множественных расчетов с изменяющимися параметрами. Большие вычислительные затраты на решения полноразмерных систем уравнений зачастую приводят к невозможности проведения достаточного количества расчетов для получения оптимального решения. Модели пониженного порядка, в том числе основанные на POD, позволяют значительно снизить затрачиваемое время и требования к вычислительным ресурсам для таких

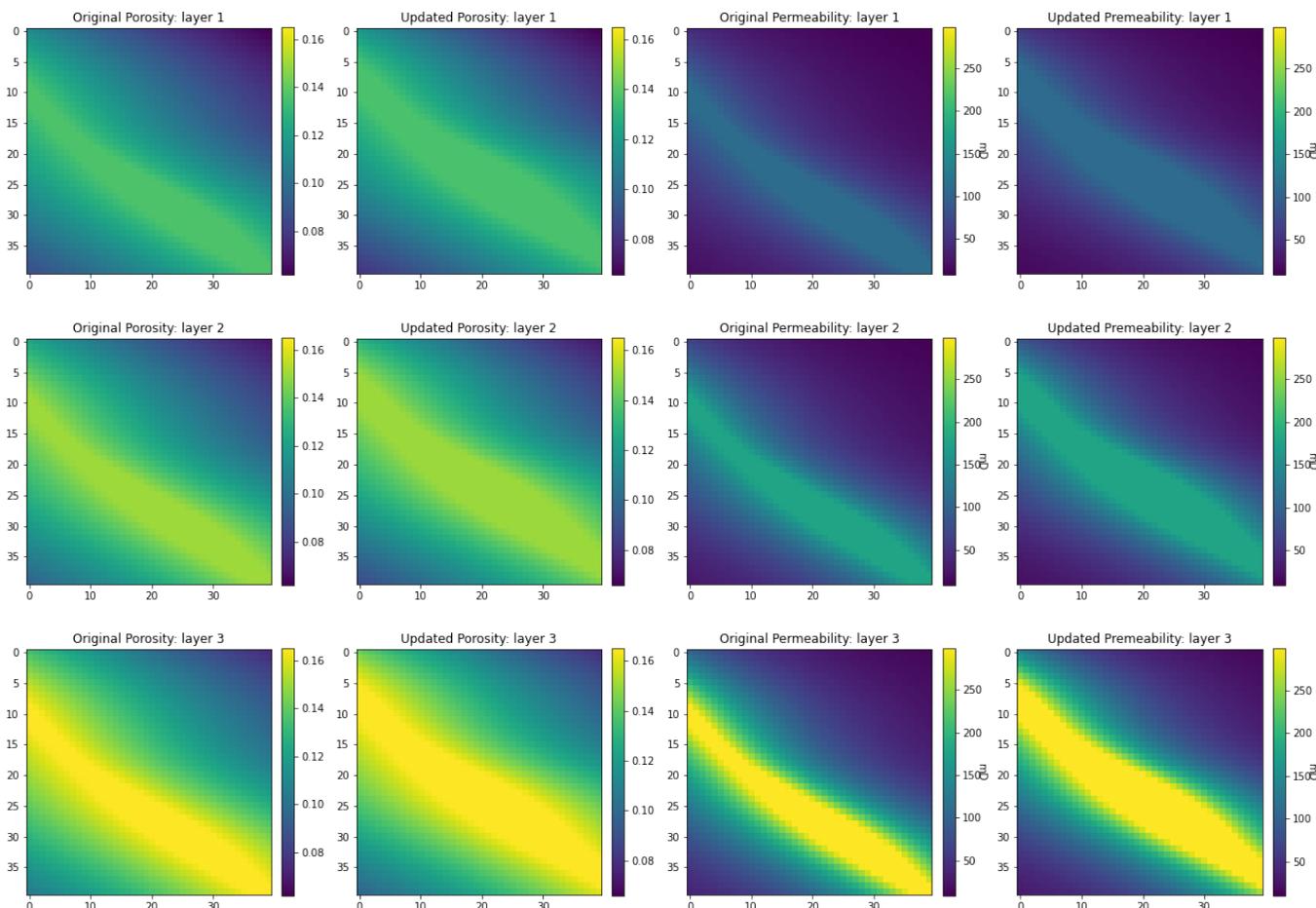


Рис. 9. Срезы полей пористости: 1-й столбец – исходная пористость, 2-й столбец – обновленная пористость; и проницаемости: 3-й столбец – исходная проницаемость, 4-й столбец – обновленная проницаемость (сверху вниз – первый, второй и третий слой)

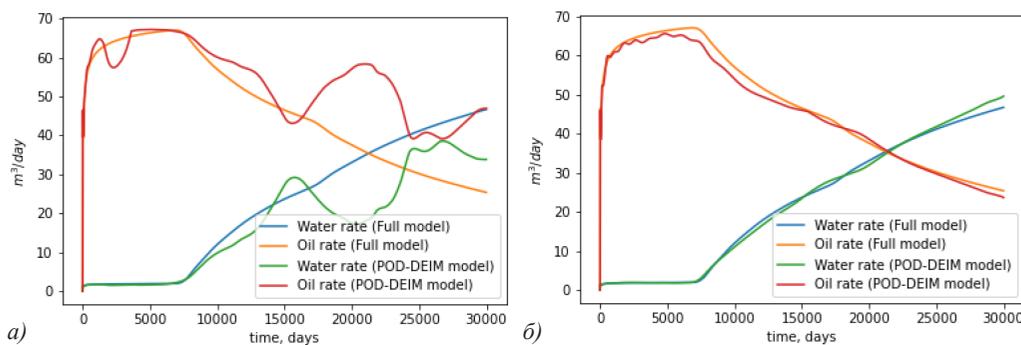


Рис. 10. Сравнение расчетных дебитов добывающей скважины с использованием модели POD-DEIM для измененных полей пористости и проницаемости (зеленая кривая – дебит воды, красная – дебит нефти) с результатами, полученными с использованием полноразмерной модели (синяя кривая – дебит воды, оранжевая – дебит нефти); (а) с базами для несовпадающей конфигурации, (б) с адаптированными базами

	RRSE модели POD-DEIM с базами для несовпадающей конфигурации скважин	RRSE модели POD-DEIM с адаптированными базами
Водонасыщенность	1,799	0,151
Давление	0,562	0,104
Дебит воды	0,473	0,0597
Дебит нефти	0,783	0,118

Табл. 6. RRSE расчета модели POD-DEIM относительно полноразмерной модели при изменении полей пористости и проницаемости

расчетов. Однако для построения таких моделей требуется выборка снимков состояний полноразмерной модели достаточно большого объема. При этом в общем случае при изменении параметров требуется заново перестраивать модель, а именно рассчитывать выборку снимков состояний для новой конфигурации и строить базы. Вычислительные и временные ресурсы, требуемые для получения выборки снимков, значительно снижают возможный выигрыш от применения моделей пониженного порядка.

В работе (Voloskov, Pissarenko, 2021) предложен метод построения модели для обновленной конфигурации на основе использования информации, содержащейся в базе для исходной конфигурации. В этом методе требуется значительно меньшая выборка снимков состояний модели с обновленной конфигурацией. Предложенный метод был рассмотрен в применении к модели в IMPES постановке, где понижение порядка применяется только для уравнения на давление.

В настоящей работе предложена модификация этого метода для модели POD-DEIM в последовательной неявной постановке, в которой понижение порядка применяется как для уравнения на давление, так и для уравнения на насыщенность, а также используется метод DEIM для эффективной работы с нелинейностями. Предлагаемый подход позволяет проводить расчеты с большим временным шагом и более эффективен для моделей большой размерности. Рассмотрено применение данного метода как для изменений конфигурации скважин, так и для вариаций полей геологических свойств. Предлагаемый метод позволяет на 1–2 порядка уменьшить ошибку моделирования по сравнению с моделью POD-DEIM, построенной для исходной конфигурации, и делает



Рис. 11. Блок-схема применения метода адаптации базисов к оптимизационным задачам

ее сопоставимой с ошибкой модели пониженного порядка, построенной непосредственно для новой конфигурации. При этом в проведенных нами численных экспериментах для адаптации базисов было достаточно порядка 100 снимков, тогда как для построения модели с нуля требуются тысячи соответствующих снимков, что на порядок снижает вычислительные затраты при построении выборки. Применяемая в настоящей работе реализация модели POD-DEIM позволяет в 5–10 раз снизить время расчета на рассматриваемых примерах по сравнению с полноразмерной моделью. Выигрыш во времени расчета зависит от соотношения числа компонент базиса модели и количества ячеек полноразмерной модели (при большей размерности модели можно получить больший выигрыш в производительности). Повышение вычислительной эффективности реализации модели POD-DEIM является одним из направлений дальнейшей работы.

Итак, предлагаемый метод открывает возможность для применения моделей POD-DEIM при решении задач, в которых требуются множественные прогоны гидродинамических моделей с изменяющимися параметрами и конфигурациями модели, таких как поиск оптимального сценария разработки или адаптация моделей к историческим данным. Блок-схема одного из вариантов применения этого метода для оптимизационных задач представлена на рис. 11.

Для фиксированной конфигурации гидродинамической модели проводится расчет выборки снимков и строится модель POD-DEIM. Результат расчета оценивается на основе критерия оптимизации (например, экономический критерий для оптимизации разработки или соответствие историческим данным по работе скважин для адаптации модели). В случае если результат расчета не привел к оптимальным значениям, конфигурация модели обновляется, и для обновленной конфигурации строится выборка из небольшого числа снимков состояний с использованием полноразмерной модели. Полученные дополнительные снимки используются для адаптации базисов модели. Цикл оптимизации выполняется до достижения соответствия результатов расчета выбранному критерию. При изменении режимов работы скважин без изменения их конфигурации или геологических свойств адаптация базисов не требуется.

Заключение

Работа посвящена применению моделей пониженного порядка, основанных на POD, для задач, требующих множественных прогонов гидродинамических моделей с изменяющимися параметрами. Рассмотрена реализация модели POD-DEIM для задачи двухфазной фильтрации в пористой среде. Для этой реализации предложено расширение подхода адаптации базисов модели к изменяющейся конфигурации с использованием небольшого числа дополнительных снимков состояний модели. Представлены результаты численных экспериментов по применению предлагаемого подхода к изменениям конфигурации скважин (длины добывающей секции горизонтального ствола, его ориентации и местоположения устья скважины) и геологических свойств.

В работе предложен обобщенный подход применения моделей POD-DEIM для решения оптимизационных задач, основанный на адаптации базисов модели.

Дальнейшая работа по данной тематике связана с реализацией предложенного подхода для практического решения задач оптимизации разработки, выбора оптимального дизайна скважин и адаптации моделей к историческим данным. Еще одним направлением планируемой работы является формализация критериев выбора числа компонент в базисах модели и числа обновляемых компонент.

Финансирование/Благодарности

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-10-2022-011 в рамках программы развития НЦМУ.

Авторы благодарят Дмитрия Владиленовича Писаренко за ценные советы и замечания при выполнении данной работы и подготовке публикации.

Литература

- Cardoso M. A. (2010). Use of Reduced-Order Modeling Procedures for Production Optimization. *SPE Journal*, 15(2010), pp. 426–435. <https://doi.org/10.2118/119057-PA>
- Chaturantabut S., Sorensen D.C. (2010). Nonlinear Model Reduction via Discrete Empirical Interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5), pp. 2737–2764. <https://doi.org/10.1137/090766498>
- Efendiev Y., Gildin E., Yang Y. (2016). Online Adaptive Local-Global Model Reduction for Flows in Heterogeneous Porous Media. *Computation*, 4(2), 22. <https://doi.org/10.3390/computation4020022>
- Fanchi J. R. (2018). *Principles of applied reservoir simulation* (Fourth edition). Gulf Professional Publishing, Elsevier. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-00352-X>
- Fraces C.G., Papaioannou A., Tchelepi H. (2020). Physics Informed Deep Learning for Transport in Porous Media. *Buckley Leverett Problem*. ArXiv:2001.05172. <http://arxiv.org/abs/2001.05172>
- Gasmi C. F., Tchelepi H. (2021). Physics Informed Deep Learning for Flow and Transport in Porous Media. ArXiv:2104.02629. <http://arxiv.org/abs/2104.02629>
- He J., Sætrum J., Durlafsky L.J. (2011). Enhanced linearized reduced-order models for subsurface flow simulation. *Journal of Computational Physics*, 230(23), pp. 8313–8341. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.06.007>
- Illarionov E., Temirchev P., Voloskov D., Kostoev R., Simonov M., Pissarenko D., Orlov D., Koroteev D. (2022). End-to-end neural network approach to 3D reservoir simulation and adaptation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 208, 109332. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109332>
- Jansen J.D., Durlafsky L.J. (2017). Use of reduced-order models in well control optimization. *Optimization and Engineering*, 18(1), pp. 105–132. <https://doi.org/10.1007/s11081-016-9313-6>
- Jin Z.L., Liu Y., Durlafsky L.J. (2020). Deep-learning-based surrogate model for reservoir simulation with time-varying well controls. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 107273. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2020.107273>
- Kani J.N., Elsheikh A.H. (2017). DR-RNN: A deep residual recurrent neural network for model reduction. ArXiv:1709.00939. <http://arxiv.org/abs/1709.00939>
- Kani J.N., Elsheikh A.H. (2018). Reduced-Order Modeling of Subsurface Multi-phase Flow Models Using Deep Residual Recurrent Neural Networks. *Transport in Porous Media*, (126), pp. 713–741 <https://doi.org/10.1007/s11242-018-1170-7>
- Kunisch K., Volkwein S. (2003). Galerkin Proper Orthogonal Decomposition Methods for a General Equation in Fluid Dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(2), pp. 492–515.
- Monteagudo J.E.P., Firoozabadi A. (2004). Control-volume method for numerical simulation of two-phase immiscible flow in two- and three-dimensional discrete-fractured media. *Water Resources Research*, 40(7). <https://doi.org/10.1029/2003WR002996>

Pacheco T.B., Silva A.F.C.D., Maliska C. (2017). Comparison of impes, sequential, and fully implicit formulations for two-phase flow in porous media with the element-based finite volume method.

Rewinski M., White J. (2003). A trajectory piecewise-linear approach to model order reduction and fast simulation of nonlinear circuits and micromachined devices. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 22(2), pp. 155–170. <https://doi.org/10.1109/TCAD.2002.806601>

Tan X., Gildin E., Florez H., Trehan S., Yang Y., Hoda N. (2019). Trajectory-based DEIM (TDEIM) model reduction applied to reservoir simulation. *Computational Geosciences*, 23(1), pp. 35–53. <https://doi.org/10.1007/s10596-018-9782-0>

Temirchev P., Simonov M., Kostoev R., Burnaev E., Oseledets I., Akhmetov A., Margarit A., Sitnikov A., Koroteev D. (2020). Deep neural networks predicting oil movement in a development unit. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 184, 106513. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106513>

Trehan S., Durlafsky L.J. (2016). Trajectory piecewise quadratic reduced-order model for subsurface flow, with application to PDE-constrained optimization. *Journal of Computational Physics*, 326, pp. 446–473. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.08.032>

Voloskov D., Pissarenko D. (2021). Adaptive POD-Galerkin Technique for Reservoir Simulation and Optimization. *Mathematical Geosciences*, 53, pp. 1951–1975. <https://doi.org/10.1007/s11004-021-09958-6>

Yang Y., Ghasemi M., Gildin E., Efendiev Y., Calo V. (2016). Fast Multiscale Reservoir Simulations With POD-DEIM Model Reduction. *SPE Journal*, 21(06), pp. 2141–2154. <https://doi.org/10.2118/173271-PA>

Young L. C. (1981). A Finite-Element Method for Reservoir Simulation. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 21(01), pp. 115–128. <https://doi.org/10.2118/7413-PA>

Сведения об авторах

Дмитрий Сергеевич Волосков – инженер-исследователь, Сколковский институт науки и технологий
Россия, 121025, Москва, Большой бульвар 30, стр. 1
e-mail: dmitry.voloskov@skoltech.ru

Дмитрий Анатольевич Коротеев – кандидат физ.-мат. наук, профессор, Сколковский институт науки и технологий

Россия, 121025, Москва, Большой бульвар, 30, стр. 1

Статья поступила в редакцию 15.08.2023;

Принята к публикации 03.11.2023;

Опубликована 30.12.2023

IN ENGLISH

ORIGINAL ARTICLE

Construction of adaptive reduced-order reservoir models based on POD-DEIM approach

D.S. Voloskov*, D.A. Koroteev

Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russian Federation

*Corresponding author: Dmitry S. Voloskov, e-mail: dmitry.voloskov@skoltech.ru

Abstract. This paper introduces a method for constructing adaptive reduced-order reservoir simulation models based on the POD-DEIM approach for field development optimization and assisted history matching problems. The approach is based on adapting the orthogonal decompositions bases to the varying model configuration. The method utilizes information contained in the bases of the original model and supplements them with new components instead of constructing a new model from scratch. Adapting the bases significantly reduces the computational costs of building reduced-order models and allows the application of such models to tasks requiring multiple simulations with different configurations. The paper presents an implementation of the POD-DEIM model for a two-phase flow problem and discusses examples of adapting this model to changes in well configuration and geological properties of the reservoir. We propose a generalized approach using POD-DEIM models in combination with the bases adaptation technique to solve optimization problems, such as field development optimization, selection of the optimal well locations, geometries, and well regimes, as well as history matching.

Keywords: reservoir simulation, reduced order modelling, field development optimization, assisted history matching

Recommended citation: Voloskov D.S., Koroteev D.A. (2023). Construction of adaptive reduced-order reservoir models based on POD-DEIM approach. *Georesursy = Georesources*, 25(4), pp. 69–81. <https://doi.org/10.18599/grs.2023.4.4>

Acknowledgements

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under agreement No. 075-10-2022-011 within the framework of the development program for a world-class Research Center.

The authors express their gratitude to Dimitri Pissarenko for the insightful advice and comments during the course of this research and in the preparation of this manuscript for publication.

References

Cardoso M. A. (2010). Use of Reduced-Order Modeling Procedures for Production Optimization. *SPE Journal*, 15(2010), pp. 426–435. <https://doi.org/10.2118/119057-PA>

Chaturantabut S., Sorensen D.C. (2010). Nonlinear Model Reduction via Discrete Empirical Interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5), pp. 2737–2764. <https://doi.org/10.1137/090766498>

Efendiev Y., Gildin E., Yang Y. (2016). Online Adaptive Local-Global Model Reduction for Flows in Heterogeneous Porous Media. *Computation*, 4(2), 22. <https://doi.org/10.3390/computation4020022>

Fanchi J. R. (2018). *Principles of applied reservoir simulation* (Fourth edition). Gulf Professional Publishing, Elsevier. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-00352-X>

Fraces C.G., Papaioannou A., Tchelepi H. (2020). Physics Informed Deep Learning for Transport in Porous Media. Buckley Leverett Problem. ArXiv:2001.05172. <http://arxiv.org/abs/2001.05172>

Gasmi C. F., Tchelepi H. (2021). Physics Informed Deep Learning for Flow and Transport in Porous Media. ArXiv:2104.02629. <http://arxiv.org/abs/2104.02629>

He J., Sætrom J., Durlafsky L.J. (2011). Enhanced linearized reduced-order models for subsurface flow simulation. *Journal of Computational Physics*, 230(23), pp. 8313–8341. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.06.007>

- Illarionov E., Temirchev P., Voloskov D., Kostoev R., Simonov M., Pissarenko D., Orlov D., Koroteev D. (2022). End-to-end neural network approach to 3D reservoir simulation and adaptation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 208, 109332. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109332>
- Jansen J.D., Durlafsky L.J. (2017). Use of reduced-order models in well control optimization. *Optimization and Engineering*, 18(1), pp. 105–132. <https://doi.org/10.1007/s11081-016-9313-6>
- Jin Z.L., Liu Y., Durlafsky L.J. (2020). Deep-learning-based surrogate model for reservoir simulation with time-varying well controls. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 107273. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2020.107273>
- Kani J.N., Elsheikh A.H. (2017). DR-RNN: A deep residual recurrent neural network for model reduction. ArXiv:1709.00939. <http://arxiv.org/abs/1709.00939>
- Kani J.N., Elsheikh A.H. (2018). Reduced-Order Modeling of Subsurface Multi-phase Flow Models Using Deep Residual Recurrent Neural Networks. *Transport in Porous Media*, (126), pp. 713–741 <https://doi.org/10.1007/s11242-018-1170-7>
- Kunisch K., Volkwein S. (2003). Galerkin Proper Orthogonal Decomposition Methods for a General Equation in Fluid Dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(2), pp. 492–515.
- Monteagudo J.E.P., Firoozabadi A. (2004). Control-volume method for numerical simulation of two-phase immiscible flow in two- and three-dimensional discrete-fractured media. *Water Resources Research*, 40(7). <https://doi.org/10.1029/2003WR002996>
- Pacheco T.B., Silva A.F.C.D., Maliska C. (2017). Comparison of impes, sequential, and fully implicit formulations for two-phase flow in porous media with the element-based finite volume method.
- Rewienski M., White J. (2003). A trajectory piecewise-linear approach to model order reduction and fast simulation of nonlinear circuits and micromachined devices. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 22(2), pp. 155–170. <https://doi.org/10.1109/TCAD.2002.806601>
- Tan X., Gildin E., Florez H., Trehan S., Yang Y., Hoda N. (2019). Trajectory-based DEIM (TDEIM) model reduction applied to reservoir simulation. *Computational Geosciences*, 23(1), pp. 35–53. <https://doi.org/10.1007/s10596-018-9782-0>
- Temirchev P., Simonov M., Kostoev R., Burnaev E., Oseledets I., Akhmetov A., Margarit A., Sitnikov A., Koroteev D. (2020). Deep neural networks predicting oil movement in a development unit. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 184, 106513. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106513>
- Trehan S., Durlafsky L.J. (2016). Trajectory piecewise quadratic reduced-order model for subsurface flow, with application to PDE-constrained optimization. *Journal of Computational Physics*, 326, pp. 446–473. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.08.032>
- Voloskov D., Pissarenko D. (2021). Adaptive POD-Galerkin Technique for Reservoir Simulation and Optimization. *Mathematical Geosciences*, 53, pp. 1951–1975. <https://doi.org/10.1007/s11004-021-09958-6>
- Yang Y., Ghasemi M., Gildin E., Efindiev Y., Calo V. (2016). Fast Multiscale Reservoir Simulations With POD-DEIM Model Reduction. *SPE Journal*, 21(06), pp. 2141–2154. <https://doi.org/10.2118/173271-PA>
- Young L. C. (1981). A Finite-Element Method for Reservoir Simulation. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 21(01), pp. 115–128. <https://doi.org/10.2118/7413-PA>

About the Authors

Dmitry S. Voloskov – Research Engineer, Skolkovo Institute of Science and Technology
30, build. 1, Moscow, 121025, Russian Federation
e-mail: dmitry.voloskov@skoltech.ru

Dmitry A. Koroteev – PhD, Professor, Skolkovo Institute of Science and Technology
30, build. 1, Moscow, 121025, Russian Federation

Manuscript received 15 August 2023;

Accepted 3 November 2023;

Published 30 December 2023